ケーリー・ハミルトンの定理

行列 A に対して，固有値を求める際に用いる

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda E - A)$$

を A の **固有多項式** と呼ぶ（計算では符号間違いを少なくするため $\det(A - \lambda E) = 0$ を使っているが，方程式としては一緒である）．

A を 3×3 行列とすると，

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - * & * & * \\ * & \lambda - * & * \\ * & * & \lambda - * \end{vmatrix}$$

という形をしていることから，$\Phi(\lambda)$ は λ に関する 3 次式になるので，実数 c_i を用いて，

$$\Phi(\lambda) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

と書ける．これに対して，λ に形式的に A を代入したものを

$$\Phi(A) = A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0E$$

と定義する．

定理 1 (ケーリー・ハミルトンの定理)**.** $\Phi(\lambda)$ を行列 A の固有多項式とすると，

$$\Phi(A) = O \text{（零行列）}$$

例 1. (1). $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\Phi(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

なので，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 - 7\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O.$$

(2). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\Phi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5$$

なので，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O.$$

証明. A が 3×3 行列で対角化できる場合のみ示す．A が

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

と対角化できたとする．すると $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は A の固有値と等しい．A の固有多項式を $\Phi(\lambda) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ として，λ に形式的に A を代入した $\Phi(A)$ に対して，

$$P^{-1}\Phi(A)P = P^{-1}A^3P + c_2P^{-1}A^2P + c_1P^{-1}AP + c_0E$$

を考える．ここで，

$$\left(P^{-1}AP\right)^3 = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^3P$$

などより，

$$\begin{aligned}
P^{-1}\Phi(A)P &= \left(P^{-1}AP\right)^3 + c_2\left(P^{-1}AP\right)^2 + c_1\left(P^{-1}AP\right) + c_0E \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^3 + c_2\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^2 + c_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + c_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1^3 + c_2\lambda_1^2 + c_1\lambda_1 + c_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 + c_2\lambda_2^2 + c_1\lambda_2 + c_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 + c_2\lambda_3^2 + c_1\lambda_3 + c_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Phi(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(\lambda_3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ここで，λ_i は A の固有値であることにより，$\Phi(\lambda_i) = 0$ なので，$P^{-1}\Phi(A)P = O$ を得る．よって，

$$\Phi(A) = POP^{-1} = O.$$

□