行列式と行基本変形

定理. 2 つの行を入れ替えると，行列式は -1 倍になる．

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\,\text{行}\to \\ \\ j\,\text{行}\to \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明. 左辺の行列式を

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とおく．σ を n 次の置換とする．互換 $(i\ j)$ に対して，置換の積を

$$\tau = \sigma\,(i\ j)$$

と置くと，添字の移る先は，

$$\begin{aligned} &\tau(i) = \sigma(j),\ \tau(j) = \sigma(i), \\ &\tau(k) = \sigma(k)\ (k \neq i, j) \end{aligned}$$

となる．また，

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma\,(i\ j)) = (-1)\operatorname{sgn}(\sigma)$$

が成り立つ．ここで，σ が n 次の置換全体を動くと，τ も n 次の置換全体を動くので，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = |B| &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots b_{j\sigma(j)}\cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{j\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau\in S_n} (-\operatorname{sgn}(\tau)) a_{1\tau(1)}\cdots a_{j\tau(j)}\cdots a_{i\tau(i)}\cdots a_{n\tau(n)} \\ &= (-1)\sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{i\tau(i)}\cdots a_{j\tau(j)}\cdots a_{n\tau(n)} \quad (\text{単なる並び替え}) \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

□

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

定理. 2 つの行が等しい行列の行列式は 0 である.

証明. 行列 A の 2 つの行が等しいとする. A の等しい行を入れ替えても, 行列は変わらない. 一方, 定理より行列式は -1 倍されるので,

$$|A| = -|A|$$

が成り立つ. よって, $2|A| = 0$ より $|A| = 0$ である. □

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

定理. 行列式で, ある行に他の行の何倍かを加えても, 行列式の値は変わらない.

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{ 行} \rightarrow \\ \\ j\text{ 行} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{blue}a_{i1}} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{red}a_{j1}} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{blue}a_{i1}} + c{\color{red}a_{j1}} & \cdots & {\color{blue}a_{in}} + c{\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{red}a_{j1}} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ 行} \\ \\ \leftarrow j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

証明. 逆から計算すると,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{blue}a_{i1}} + c{\color{red}a_{j1}} & \cdots & {\color{blue}a_{in}} + c{\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{red}a_{j1}} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{blue}a_{i1}} & {\color{blue}\cdots} & {\color{blue}a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{red}a_{j1}} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{red}a_{j1}} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ {\color{red}a_{j1}} & {\color{red}\cdots} & {\color{red}a_{jn}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ 行} \\ \\ \leftarrow j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

となるが, 右辺二項目の行列式は, i 行と j 行が等しいので 0 である. よって, 定理の等式は示された. □

命題.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解説. $n = 4$ の場合を示す.

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_4} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)}$$

を計算する際，$\sigma(1) \neq 1$（一行目で a_{11} を選ばない）とき，ある $k > 1$ で $\sigma(k) = 1$（以降のの行で 0 を選ばなければならない）となるので，

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} = 0$$

となる．よって，$\sigma(1) \neq 1$ となる項は 0 なので，

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\substack{\sigma \in S_4 \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{11} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} \\ &= a_{11} \sum_{\substack{\sigma \in S_4 \\ \sigma(1)=1}} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} \end{aligned}$$

を得る．ここで，$\sigma(1) = 1$ となる 4 次の置換を考えると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ですべてであり，これら置換は $\{2, 3, 4\}$ を移す 3 次の置換

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

と等しい（もちろん符号も含めて）．したがって，

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \sum_{\substack{\sigma \in S_4 \\ \sigma(1)=1}} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} \\ &= a_{11} \sum_{\tau \in S_3} a_{2\tau(2)} a_{3\tau(3)} a_{4\tau(4)} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

を得る． □

メモ. 他の定理を含め，行列式の性質をまとめると，行列式は行変形に関して以下の性質を持つ：

行変形	行列式の値
ある行の定数倍を他の行に足す	変わらない
2 つの行を入れ替える	(-1) 倍
行を α 倍する	α 倍

例.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

行変形を用いて，第 1 列の成分を一つ以外すべて 0 にする（命題の形）.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{ 行 }-2\text{ 行 }\times 3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{3\text{ 行 }-2\text{ 行 }\times 3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -1 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{4\text{ 行 }-2\text{ 行 }\times 3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -1 & -7 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{ 行と }2\text{ 行を交換}}{=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & -11 \\ 0 & 9 & -1 & -7 \\ 0 & 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \overset{\text{命題}}{=} (-1)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & -11 \\ 9 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \overset{3\text{ 次行列式の計算}}{\cdots} = -58$$