行列式の定義

定義. n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対して，行列式を

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定める．ここで，S_n は n 次の置換の集合である．

例. 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ を求める．まず，定義より

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

である．ここで，3 次の置換は

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

なので，

$$\begin{aligned}
|A| =& \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
=& \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\
=& \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11} a_{22} a_{33} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11} a_{23} a_{32} \\
& + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12} a_{21} a_{33} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12} a_{23} a_{31} \\
& + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13} a_{21} a_{32} + \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13} a_{22} a_{31} \\
=& (+1)\{(-4) \cdot (-3) \cdot (-2)\} + (-1)\{(-4) \cdot 3 \cdot 1\} \\
& + (-1)\{2 \cdot 1 \cdot (-2)\} + (+1)\{2 \cdot 3 \cdot 4\} \\
& + (+1)\{(-1) \cdot 1 \cdot 1\} + (-1)\{(-1) \cdot (-3) \cdot 4\} \\
=& -24 + 12 + 4 + 24 - 1 - 12 \\
=& 3
\end{aligned}$$

例. 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ を求める．定義より，

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_4} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)}$$

である．4 次の置換の集合 S_4 の元は $4! = 24$ 個あるので，$\sum_{\sigma \in S_4}$ は 24 項の和になる．しかし，ほとんどの成分が 0 なので，0 でない項のみを書けば，

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1\} + \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \{(-1) \cdot 6 \cdot 7 \cdot (-2)\} \\
&= (-1)\{\cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1\} + (+1) \cdot \{(-1) \cdot 6 \cdot 7 \cdot (-2)\} \\
&= -210 + 84 \\
&= -126
\end{aligned}$$

である．