余因子展開

定義.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

に対して，1 行と j 列を取り除いて作った行列の行列式

$$\tilde{a}_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を A の $(1,j)$ 余因子 と呼ぶ（一般の (i,j) 余因子については教科書を参照）.

定理. $n\times n$ 行列 A に対して，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\tilde{a}_{11}+a_{12}\tilde{a}_{12}+\cdots+a_{1n}\tilde{a}_{1n}$$

が成り立つ.

証明. A が 3×3 行列のとき証明する．A の第 1 行ベクトルに対して，

$$(a_{11},a_{12},a_{13})=a_{11}(1,0,0)+a_{12}(0,1,0)+a_{13}(0,0,1)$$

となるので，行列式の行に関する線形性より，

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

を得る．さらに列に関する交代性（列を交換すると符号が変わる）より，

$$
\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

が成り立つので,

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となり，さらに 1 行が $(1,1)$ 成分を除いて 0 なので,

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

定理の式と合わせるために，(-1) の指数を調整すると,

$$
\begin{aligned}
&= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

メモ. 上記で,

$$
\tilde{a}_{12} = \cdot(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

のように，$\tilde{a}_{12}$ は符号を含むことに注意.

系. $n \times n$ 行列 A に対して,

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{ij} & 0\ \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij}\tilde{a}_{ij}
$$

が成り立つ．また，列についても同様の式が成り立つ.

例．行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

の値を系を用いて求める．行列の数字の並びをみて工夫する．

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 列}-2\text{ 列}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{3\text{ 行で余因子展開}}{=} (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{ 列}-2\text{ 列}}{=} (-3) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{1\text{ 列で余因子展開}}{=} (-3)(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(6-2) = -12$$

メモ．例では，系を適用することで，

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{3\text{ 行で余因子展開}}{=} (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

と変形している．基本変形のみで上記の変形を得ることもできるので紹介しよう．

左辺の行列式に行交換と列交換を用いて，色の付いていない数字の位置関係をずらさずに，$(3,2)$ 成分を $(1,1)$ 成分に移動する．

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ここで，色の付いていない数の位置関係をずらさないように，交換は隣り合う行か列同士で行っていることに注意しよう．すると，第 1 行が $(1,1)$ 成分を除いてすべて 0 なので，

$$(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdot (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

となり，初めの行列の $(3,2)$ 成分に注目して変形しているので，覚えやすいように，符号を $(-1)^{2+1} = (-1)^{(2+1)+2} = (-1)^{3+2}$ と変形すると，

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

を得る．