差積

定義. n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する多項式

$$\begin{array}{rcllll} \Delta(x_1, \ldots, x_n) & = & (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ & & & (x_2 - x_3) & \cdots & (x_2 - x_n) \\ & & & & \cdots & \\ & = & \Pi_{i<j}(x_i - x_j) & & & \end{array}$$

を差積という.

4 変数 x_1, x_2, x_3, x_4 の差積は

$$\begin{array}{rclll} \Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_1 - x_4) \\ & & & (x_2 - x_3) & (x_2 - x_4) \\ & & & & (x_3 - x_4) \\ & = & \multicolumn{3}{l}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)} \end{array}$$

である.

いま，4 次の置換 σ に対して，$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)\}$ は $\{1, 2, 3, 4\}$ の並び替えである．特に，互換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を考えると，σ は 2 と 4 を入れ換える互換である．この σ に対して，

$$\begin{array}{rclll} \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) & = & \Delta(x_1, x_4, x_3, x_2) & & \\ & = & (x_1 - x_4) & (x_1 - x_3) & (x_1 - x_2) \\ & & & (x_4 - x_3) & (x_4 - x_2) \\ & & & & (x_3 - x_2) \\ & = & -\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) & & \end{array}$$

より，

$$\Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = -\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

となる.

補題. n 変数の差積に対して，τ を互換とすると，

$$\Delta(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

が成り立つ．

解説. $n = 7$，$\tau = (3, 6)$（3 と 6 を交換する互換）の場合を考える．互換 τ によって，変化する因子は x_3 と x_6 を含む因子であり，下記の色付きのものになる：

（τ で移る）

$$\begin{array}{lcccccc}
\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_7) & & & & & & \\
= & (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_1 - x_4) & (x_1 - x_5) & (x_1 - x_6) & (x_1 - x_7) \\
 & & (x_2 - x_3) & (x_2 - x_4) & (x_2 - x_5) & (x_2 - x_6) & (x_2 - x_7) \\
 & & & (x_3 - x_4) & (x_3 - x_5) & (x_3 - x_6) & (x_3 - x_7) \\
 & & & & (x_4 - x_5) & (x_4 - x_6) & (x_4 - x_7) \\
 & & & & & (x_5 - x_6) & (x_5 - x_7) \\
 & & & & & & (x_6 - x_7)
\end{array}$$

（τ で移る）

（τ で -1 倍）

ここで，$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ と比べて，$\Delta(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(7)})$ では，「τ で移る」と書かれた個所は互いに移り合うのみである．「τ で -1 倍」と書かれた個所は (-1) 倍で移り合うので，積全体では符号の変化は起こらない．残る変化は $(x_3 - x_6)$ が $(x_6 - x_3)$ のみなので，全体での符号の変化は (-1) 倍のみであり，

$$\Delta(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(7)}) = -\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_7)$$

が成り立つ． □