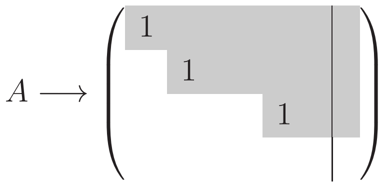
階段行列と階数

一般に行列 A に対して,

1. ある行の定数倍を他の行に足す
2. 行を入れ換える
3. 行に 0 以外の数をかける

という操作を 行基本変形 と呼ぶ．行基本変形をすることで,



と変形できる．だたし，行列の色の付いていない成分は 0 である．変形後の行列を 階段行列 と呼ぶ.

一般に，任意の行列 A を，行基本変形により階段行列に変形することができる．このとき，得られた階段行列の「零ベクトルでない行ベクトルの個数」を A の 階数 と呼び，$\mathrm{rank}\, A$ と書く．行列の階数は，どのように行基本変形しても一通りに定まることが知られている.

例.

階段行列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\\0&0&0&10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\0&0&0&7&8&9&10\\0&0&0&0&4&6&6\end{pmatrix}$

階段行列でない $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&4&5\\0&0&6&7\end{pmatrix}$

例. $A = \begin{pmatrix}2&1&4\\4&3&10\\2&3&8\end{pmatrix}$ のとき, $\begin{pmatrix}2&1&4\\4&3&10\\2&3&8\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ なので, $\mathrm{rank}\, A = 2$ である.

例. 次の行列を階段行列に変形し, 階数を求めよ .

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\2&-1&1&-4&3\\5&6&11&-7&12\\2&2&4&2&12\end{pmatrix}$$

(解答例) 行に関する基本変形を行い, 階段行列を作る.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\2&-1&1&-4&3\\5&6&11&-7&12\\2&2&4&2&12\end{pmatrix}\xrightarrow{2\text{ 行 }-1\text{ 行 }\times 2}\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\0&-5&-5&-6&-9\\5&6&11&-7&12\\2&2&4&2&12\end{pmatrix}\xrightarrow[4\text{ 行 }-1\text{ 行 }\times 2]{3\text{ 行 }-1\text{ 行 }\times 5}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\0&-5&-5&-6&-9\\0&-4&-4&-12&-18\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{4\text{ 行 と }2\text{ 行 を入れ替え}}\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\0&-2&-2&0&0\\0&-4&-4&-12&-18\\0&-5&-5&-6&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行 を }(-1/2)\text{ 倍}}\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\0&1&1&0&0\\0&-4&-4&-12&-18\\0&-5&-5&-6&-9\end{pmatrix}\xrightarrow[4\text{ 行 }+2\text{ 行 }\times 5]{3\text{ 行 }+2\text{ 行 }\times 4}\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\0&1&1&0&0\\0&0&0&-12&-18\\0&0&0&-6&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{ 行 }-3\text{ 行 }\times(1/2)}\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\0&1&1&0&0\\0&0&0&-12&-18\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{3\text{ 行 }\times(-1/12)}\begin{pmatrix}1&2&3&1&6\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&3/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

答え $\operatorname{rank} A=3$

行基本変形と正則行列

行列の行基本変形は，正則行列を <u>左から</u> かけることに対応している. 3×3 行列に対しては，以下の行列を左からかけると，

2 行を k 倍する；$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,　2 行と 3 行を交換する；$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

1 行に 2 行 $\times(-1)$ を 足す；$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

逆行列の求め方

行列 A の逆行列は以下の手順で求められる;

1. 行列 A と単位行列 E を並べた行列 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$ を作る.
2. 行列 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$ に対して, 中にある A を単位行列 E にするように行基本変形をする;
$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & X \end{pmatrix}$$
3. 得られた行列の中にある X が A の逆行列 A^{-1} になる.

例題

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算せよ.

(解答例) 以下の行列に対して, 左 3 列が単位行列になるように行基本変形を行う.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行} - 2\text{ 行} \times 2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 2\text{ 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行} + 1\text{ 行} \times 3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行} + 3\text{ 行} \times 2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{ 行と } 3\text{ 行を入れ替える}]{3\text{ 行 } \times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{答え} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$