# 線形独立性と行列式

**定理.** $A$ を $n$ 次正方行列とすると,

$$\begin{aligned}|A|=0 \quad &\Longleftrightarrow A \text{ の行ベクトルが 1 次従属} \\ &\Longleftrightarrow A \text{ の列ベクトルが 1 次従属}\end{aligned}$$

## 行列式と空間図形

**命題.**

*(1).* 空間内の 3 点 $\mathrm{P_i}$ $(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1,2,3)$ を通る平面の式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

である（方程式を満たす $(x,y,z)$ の集合が平面）.

*(2).* 点 $\mathrm{P_0}$ $(x_0, y_0, z_0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ で貼られる平面（点 $\mathrm{P_0}$ を始点として $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の線形結合で表される点の集合）の式は,

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

である.

*(3).* ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に直交するベクトルである．このベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の **外積ベクトル** と呼び，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と書く.