連立 1 次方程式の解の存在定理

1　解の存在

連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える．

定理 1. $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]$ ならば，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない．

解説. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + \ \ y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + \ \ y + z = 2 \end{cases}$$

を考える．ここで，第 1 式と第 3 式が明らかに矛盾している．よって解を持たない．この拡大係数行列を階段行列に変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

となる．よって，

$$\operatorname{rank} A = 2,\ \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = 3$$

であるので，$\operatorname{rank}[\ A\ b\ ] \neq \operatorname{rank} A$ が成り立つ．

一方，上記の階段行列を連立 1 次方程式に戻すと

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad y \qquad = 1 \\ \qquad\quad\ \ 0 = 1 \end{cases}$$

となり，第 3 式に矛盾した式が現れる．一般に，$\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}[\ A\ b\ ]$ のとき，$[\ A\ b\ ]$ を変形すると

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{array}\right]$$

という形の階段行列を得る．このとき，最後の行に対応する式が

$$0 = 1$$

と矛盾した式になる．よって連立 1 次方程式が解を持たないことがわかる． $\square$

2　パラメータの数

定理 2. n 変数連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対して，$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]$ のとき，解は $n-\operatorname{rank} A$ 個のパラメータを用いて表せる．

解説．4 変数連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z+\ \ w=1 \\ x+2y+3z+4w=2 \\ 2x+2y+2z+2w=2 \end{cases}$$

を考える．この拡大係数行列を階段行列に変形すると

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 1&2&3&4&2\\ 2&2&2&2&2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 0&1&2&3&1\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&-1&-2&0\\ 0&1&2&3&1\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

となり，

$$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]=2$$

が成り立つ．

一方，上記の階段行列を連立 1 次方程式に戻すと

$$\begin{cases} x\qquad -\ \ z-2w=0 \\ \qquad y+2z+3w=1 \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases}$$

となる．よって，

$$\begin{cases} x=z+2w \\ y=1-2z-3w \end{cases}$$

とかけるので，パラメータ s,t を用いて，$z=s$，$w=t$ とおくと，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+2t\\ 1-2s-3t\\ s\\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s\\ -2s\\ s\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t\\ -3t\\ 0\\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかける．ここで，解は 2 つのパラメータ s,t を用いて表されているので，

$$\text{（パラメータの個数）}=\text{（変数の個数）}-\operatorname{rank} A$$

$$2=4-2$$

が成り立つ．一般に，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対して，$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}[\ A\ b\ ]$ のとき，$[\ A\ b\ ]$ を変形すると

$$[A\quad b] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&&0&\\ &1&&0&\\ &&&1&\\ &&&& \end{array}\right]$$

という形の階段行列を得る．この行列に対応する連立方程式の，変数の順序を入れ換えると（係数行列の列は各変数の係数に対応），

$$(*)\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \end{array}\right]$$

となる．いま，係数行列 A の列の数（横のサイズ）は，連立方程式の変数の個数に等しい．上記の具体例を考えると，行列 $(*)$ の色の濃い部分の列に対応する変数をパラメータとして解を書くことが出来る．よって，

$$((*)\ \text{の列数}) - ((*)\ \text{の段の個数}) = (\text{変数の個数}) - \operatorname{rank} A$$

のパラメータを用いて，連立方程式の解を書くことができる． □

3　まとめ

n 変数連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に対して，

1. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}] \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持つ．
2. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}]$ のとき，（変数の個数）$- \operatorname{rank} A$ 個のパラメータを用いて，解を書くことができる．
3. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}] = n$（変数の個数）のとき，ただ 1 組の解を持つ（パラメータは 0 個）．

4　斉次連立 1 次方程式

右辺が零ベクトルである

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

の形の方程式を，**斉次(せいじ)連立 1 次方程式** と呼ぶ．この方程式の解のうち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を **自明解**，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ である解を **非自明解** と呼ぶ．

定理 3. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が非自明解を持つ $\iff \operatorname{rank} A <$（変数の個数）

Proof. いま，自明解は常に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を満たす．前節「まとめ」より，

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} A = (\text{変数の個数}) &\iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\ \text{がただ 1 組の解を持つ} \\ &\iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\ \text{の解は自明解のみ} \end{aligned}$$

が成り立つ．この命題の対偶を取ると，定理の主張が成り立つ． □