線形独立性と階数

$\mathbb{R}^n$ の座標軸が持つ重要な性質の一つは，それぞれの軸（を表すベクトル）が「別の方向を向いている」ということである．これを数学的に扱いやすいように定義する．まず，ベクトルの個数が 2 個の場合，3 個の場合を定義し，その後，一般の n 個の場合を定義する．

定義 (線形独立).

(1). 2 個のベクトル $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\}$ が **線形独立** である．

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の一方のベクトルが他方の定数倍でない．

$\iff$ $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ が同一直線上にない．

(2). 3 個のベクトル $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ が **線形独立** である．

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の内，どのベクトルも他の 2 つベクトルの線形結合として表せない．

$\iff$ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ は同一平面上にない．

(3). $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ が **線形独立** である．

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ の内，どのベクトルも他のベクトルの 線形結合として表せない．

$\iff$ $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ が

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots c_n\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{o}$$

を満たすならば,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

となる．

(4). $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ が **線形従属** である．

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ が 線形独立でない．

$\iff$ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ の内，あるベクトルが，他のベクトルの 線形結合で書ける．

定理 (線形独立と階数)**.** A を $n \times m$ 行列とする．

(1). $\operatorname{rank} A =$「線形独立な行ベクトルの個数の最大値」

(2). $\operatorname{rank} A = n \iff$ 行ベクトルが 線形独立