線形写像と表現行列

1　線形写像

定義. f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像とする.

(1). $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

(2). $f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$

が成り立つとき，f を線形写像と呼ぶ.

定理 1. A を $m \times n$ 行列,

$$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

とすると，f_A は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像である.
逆に，任意の線形写像に対して，ある行列 M が存在して,

$$f(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$$

と書ける．このような M を f の（標準基底に関する）**表現行列** と呼ぶ.

補足. 実際には，写像の定義域と値域の基底に決めると，それに対応した表現行列が決まる．この講義では，単に表現行列という場合には，上の定義の標準基底に関する表現行列を指す.

2　基底の取り替え

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で定義する．例えば,

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，写像 f により $\mathbb{R}^2$ の点は,

$$\mathrm{P} : \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \mathrm{Q} : \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と移る．いま，標準基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底であるが，一方で，

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

も $\mathbb{R}^2$ の基底になることがわかる．実際に，$\mathbb{R}^2$ の任意の点は，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}$$

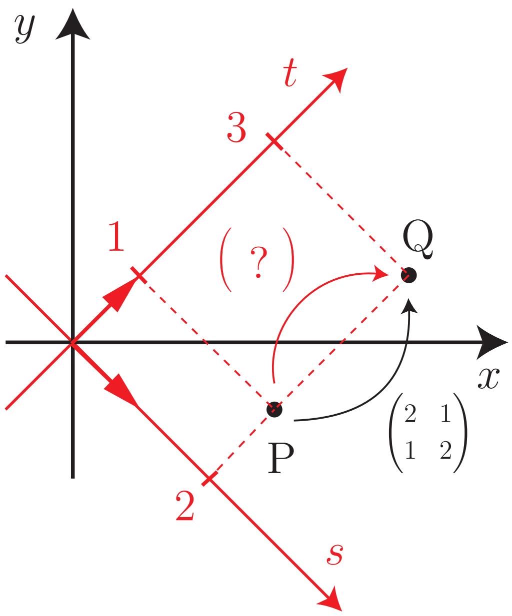
と書ける．例えば点 P，Q を s–t 座標で表すと，

$$\mathrm{P}:\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$
$$\mathrm{Q}:\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

と書ける（s–t 座標の表示には角括弧を用いる）．$U = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ とおくと，x–y 座標と s–t 座標の関係は，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = U\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

という関係にある．



ここで，次のような問題を考える．

> $\mathbb{R}^2$ の点を写像 f で移すとき，点を x–y 座標で表すと，写像 f は
>
> $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
>
> と書ける．それでは，点を s–t 座標で表すと，写像 f はどのような行列で書けるか？
>
> $$\begin{array}{cccc} & 点\ \mathrm{P} & \xrightarrow{f} & 点\ \mathrm{Q} \\ x\text{–}y\ 座標 & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{行列\ A} & \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ s\text{–}t\ 座業 & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{行列\ ?} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

いま，行列と点移動の関係をまとめると，

$$\begin{array}{ccc} 点\ \mathrm{P} & \xrightarrow{f} & 点\ \mathrm{Q} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \xrightarrow{A} & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ U \Big\uparrow & & \Big\downarrow U^{-1} \\ \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} s' \\ t' \end{bmatrix} \end{array}$$

となる．よって，$\begin{bmatrix} s' \\ t' \end{bmatrix}$ が得られるように，行列の順を追うと，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s' \\ t' \end{bmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^{-1}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= U^{-1}A\left(U\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より，s–t 座標（基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$）に関する表現行列は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

補足.

(1). 検算してみると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

となり，確かに点 P の s–t 座標を点 Q の s–t 座標に移す.

(2). 写像 f は，標準基底では

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で表現されたが，座標変換すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と対角行列になった．対角行列は様々な場面で扱いやすい行列である.