

線形代数 II: 対称行列

1 対称行列と固有ベクトル

定義. A を実正方行列とする. ${}^tA = A$ のとき, A を対称行列と呼ぶ.

解説. 対称行列は行列の成分が対角成分に対して, 対称である行列である. 例えば以下は対称行列である;

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 1. 実対称行列の固有値はすべて実数である.

解説. 講義中の計算では固有値はいつも実数になるが, これは計算のしやすさのために意図的に数字を調整した結果である. 例えば, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $1 \pm 2i$ となり虚数を含む.

注意 (転置に関する注意事項). 内積は, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ にたいして,

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^txy$$

と書ける. また, ${}^t(Ax) = {}^tx^tA$ となる.

証明. A を実対称行列とし, λ と x を A の固有値と対応する固有ベクトルとする. いま, \bar{x} を x の各成分の複素共役をとったベクトルとする. このとき, ${}^t\bar{x}x = \|x\|^2$ となる. ここで, 実行列であることより $A = \bar{A}$, 対称であることより $\bar{A} = {}^t\bar{A}$, 転置の性質より ${}^t\bar{x}{}^t\bar{A} = {}^t(\overline{{}^tAx})$ が成り立つことに注意する. すると

$$\lambda {}^t\bar{x}x = {}^t\bar{x}(\lambda x) = {}^t\bar{x}Ax = {}^t\bar{x}\bar{A}x = {}^t\bar{x}{}^t\bar{A}x = {}^t(\overline{{}^tAx})x = {}^t(\overline{\lambda x})x = \bar{\lambda}{}^t\bar{x}x$$

を得る. これより $(\lambda - \bar{\lambda}){}^t\bar{x}x = 0$ となるが, ${}^t\bar{x}x \neq 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ である. よって, λ は実数である. \square

定理 2. A を対称行列, λ_1, λ_2 を A の異なる固有値とする. このとき λ_1 の固有ベクトルと λ_2 の固有ベクトルは直交する.

例.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

は対称行列であり, 固有値と固有ベクトルの組はそれぞれ

$$\lambda_1 = 2, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -4, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. このとき, $\lambda_1 = 2$ と $\lambda_2 = -4$ の固有ベクトルは

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

となるので, 直交している. 一方, $\lambda_1 = 2$ の 2 つの固有ベクトルは

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2$$

となるので直交していない.

定理 1 の証明. λ_1 の固有ベクトルを \mathbf{x} , λ_2 の固有ベクトルを \mathbf{y} とする. このとき, $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$, $A\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$ なので,

$$\lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda^t \mathbf{x} \mathbf{y} = {}^t (\lambda \mathbf{x}) \mathbf{y} = {}^t (A\mathbf{x}) \mathbf{y} = {}^t \mathbf{x} {}^t A \mathbf{y}$$
$$(A \text{ は対称行列なので}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{y} = {}^t \mathbf{x} (A\mathbf{y}) = {}^t \mathbf{x} (\lambda_2 \mathbf{y}) = \lambda_2 {}^t \mathbf{x} \mathbf{y} = \lambda_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

となる. よって,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

を得る. したがって $\lambda_1 \neq \lambda_2$ より, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ が成り立つ. □

2 対称行列の直交対角化

証明は省略するが、次の定理が成り立つ。まず用語を用意する。

定義. ${}^tAA = E$ を満たす正方行列を直交行列という。

補足. (1). A が直交行列であれば、 $A^{-1} = {}^tA$ となる。

(2). ベクトルの次元と基底の数が等しい時、正規直交基底を列ベクトルとして並べた行列は直交行列になる。例えば、 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ は正規直交基底

なので、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は直交行列である。実際、上の A に対して、

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

定理 3. すべての対称行列は直交行列で対角化できる。つまり、対称行列 A に対して、 tPAP が対角行列になるような直交行列 P が存在する。

例.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A は対称行列である。まず、固有値と固有ベクトルを求めると、

$$\lambda = 3, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = -3, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。これを正規直交化する。ここで、定理 1 より、異なる固有値の固有ベクトルは直交している (実際に確認してみよ)。よって、 $\lambda = 3$ の固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ だけ正規直交化し、 $\lambda = -3$ の固有ベクトル \mathbf{x}_3 は正規化のみ行う (ノルムを 1 にする)。

シュミットの正規直交化により,

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{y}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を得る. このとき, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ は $\lambda = 3$ の固有ベクトルである.

次に \mathbf{x}_3 のノルムを 1 にすると,

$$\frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり, 正規直交基底

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

が得られる. ここで, すべて A の固有ベクトルになっていることに注意すると, それらを並べて,

$$A \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. よって, $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

と直交行列で対角化できる. なお, 上記補足より, $P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

であるので, 実際は,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ.