写像の合成と行列の積

行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とおき，これらの行列によって定義される線形写像を

$$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ f_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}
f_A \circ f_B(\boldsymbol{x}) = f_A(f_B(\boldsymbol{x})) &= f_A\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= f_A\left(\begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{12}(b_{21}x + b_{22}y) \\ a_{21}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{22}(b_{21}x + b_{22}y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21})\ x + (a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22})\ y \\ (a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21})\ x + (a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22})\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= AB\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

となる．よって，行列の積 AB は，合成写像 $f_A \circ f_B$ を表す行列と等しい．

行列の積の計算を初めて見たとき,「なぜこの順番でかけ算と足し算をして計算するんだ？」と疑問を持った人もいると思う．実際には，行列の積の定義というのは，それが合成写像を表す行列と一致するように定義したのである．

具体例

y 軸に関する対称移動を表す行列 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と，原点を中心とする $45°$ 回転を表す行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ を考え，$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$，$f_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ とおく．まず，点 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は f_B で，

$$f_B(\boldsymbol{u}) = f_B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

に移る．さらに，この点は f_A で，

$$f_A\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

に移る．一方，行列の積を計算すると，

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となり，

$$(AB)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

を得る．これは，$\boldsymbol{u}$ を f_B で移してから f_A で移した点と等しい．

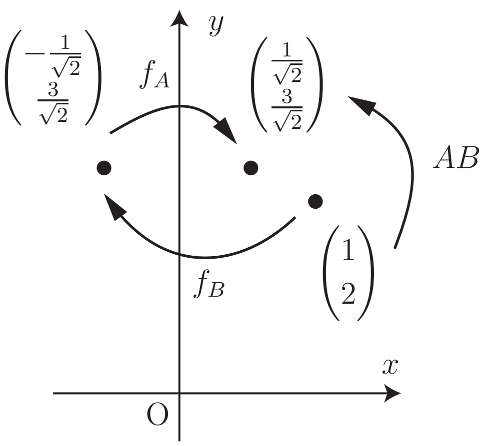

図 1: 点 $(1, 2)$ が移る様子．