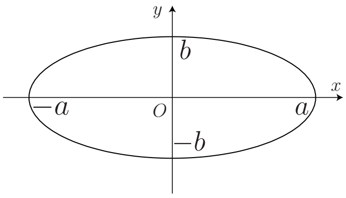
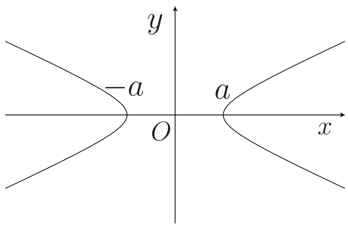
二次曲線

1　二次曲線

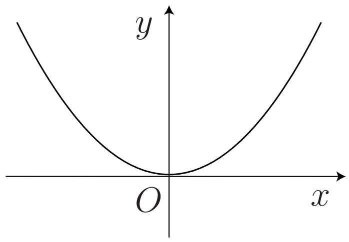
x, y の二次式が表す曲線を二次曲線と言う．代表的なものとして以下がある．



楕円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



放物線：$ax^2-y=0$

2　二次曲線の標準形 (一次の項がない場合)

例 1. 次の二次曲線の標準形を求め, 曲線の概形を図示せよ.

$$2x^2+4xy-y^2=1.$$

(解答)

Step 1. (行列表示) 行列とベクトルを用いると, 上記の方程式は

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1 \tag{1}$$

と書ける ($\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ は行ベクトル).

Step 2. (直交対角化) ここで, $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ を直交行列で対角化する．いま固有値と固有ベクトルは $\lambda=3, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\lambda=-2, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ である．固有ベクトルは直交しているので, 正規化だけを行うと, $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ は正規直交基底になる.

そこで, $P=\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ とおくと,

$$AP=P\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．さらに, $P^{-1}={}^tP$ であることを用いると,

$${}^tPAP=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

と直交行列で対角化できる.

Step 3. (座標変換) 次に $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ と座標変換をする. ここで,

$$[\ x\ y\ ] = {}^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\left(P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = [\ X\ Y\ ]^tP$$

を用いると, 方程式 (1) の第一項は,

$$\begin{aligned}[\ x\ y\ ] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\left(P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) A \left(P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) &= [\ X\ Y\ ]^tPAP \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &= [\ X\ Y\ ] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 3X^2 - 2Y^2\end{aligned}$$

となるので (3 番目の等式は直交行列で対角化したので成り立つ),

$$3X^2 - 2Y^2 = 1 \tag{2}$$

を得る. これを二次曲線の**標準形**と呼ぶ. これより曲線は双曲線になることがわかる.

補足. 方程式 (2) より直接わかることは, 曲線が XY 座標で, 双曲線になることである. しかし, xy 座標から XY 座標への座標変換は正規直交基底による変換なので, XY 座標における図形の形 (角度, 大きさ) は元の図形の形と等しくなる.

Step 4. (作図) 座標変換の式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

より, X 軸は $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ の向き, Y 軸は $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ の向きになるので, XY 座標と問題の曲線の概形を xy 平面に図示すると, 下記のようになる.

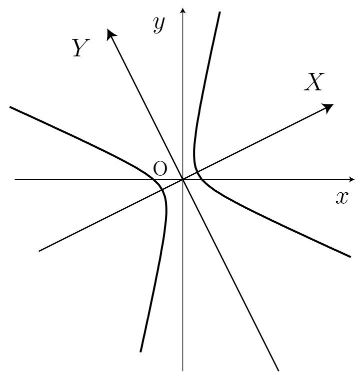


図 1: $2x^2 + 4xy - y^2 = 1$ の概形

3　二次曲線の標準形 (一般の場合)

例 2. 次の二次曲線の標準形を求め, 曲線の概形を図示せよ.

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 16x - 8y + 2 = 0.$$

(解答)

Step 1. (行列表示) 行列とベクトルを用いると, 上記の方程式は

$$\begin{bmatrix} x \ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2 = 0 \tag{3}$$

と書ける.

Step 2. (直交対角化) ここで, 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ とし, 直交行列で対角化する. いま固有値と固有ベクトルは $\lambda = 6$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 4$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である. 固有ベクトルは直交しているので, 正規化だけ行うと, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は正規直交基底になる. そこで, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ とおくと, $AP = P \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ が成り立つ. さらに, $P^{-1} = {}^tP$ であることを用いると,

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

と直交行列で対角化できる.

Step 3. (座標変換) 次に $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ と座標変換をする. ここで,

$$\begin{bmatrix} x \ y \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\left(P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \ y \end{bmatrix} {}^tP$$

を用いると, 方程式 (3) の第一項は,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= {}^t\left(P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right) A \left(P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x' \ y' \end{bmatrix} {}^tPAP \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x' \ y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 6x'^2 + 4y'^2 \end{aligned}$$

となる (3 番目の等式は直交行列で対角化したので成り立つ). また, 第二項は

$$\begin{bmatrix} -16 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -8 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -12\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y'$$

方程式 (3) は,

$$6x'^2 + 4y'^2 - 12\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' + 2 = 0 \tag{4}$$

となる (xy の項が消えていることに注意せよ).

Step 4. (平行移動) 方程式 (4) を各変数で平方完成すると,

$$6(x' - \sqrt{2})^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 12 = 0$$

となる. ここで $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - \sqrt{2} \\ y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ と座標変換 (平行移動) すると,

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{3} = 1 \tag{5}$$

を得る. この (5) 式を二次曲線の**標準形**と呼ぶ. これより, 二次曲線は楕円になることがわかる.

Step 5. (作図) 各座標変換の式より, 座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ の関係式は,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X + \sqrt{2} \\ Y - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

となる. よって, XY 座標は xy 平面の $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ に原点を持ち, X 軸が $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 方向, Y 軸が $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 方向にのびていることがわかる. したがって, 曲線の概形は下図のようになる.