## 12　制約付き変分問題

前回は

$$\text{最小化 } F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$
$$\text{制約 } y(a) = A, y(b) = B$$

のような変分問題に対して, 最適解を求める手法を学んだ. この種の問題を固定端変分問題と呼ぶ.

固定端変分問題は, 実質的に制約がないように扱うことができた. 今回はより明確な制約を持つ変分問題を扱う.

以下のような制約を持つ問題を考える:

$$(P) \text{ 最小化 } F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$
$$\text{制約 } G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))dx = l,\ y(a) = A, y(b) = B$$

**例 27.** 高さ $h$ で, 長さ $l$, 密度 $m$ の紐の両端を固定したときの紐の形を求める. $x$ 座標を水平方向, $y$ 座標を垂直方向として, 紐の形を $y(x)$ という関数で表し, 紐の両端を $(a, h)$, $(b, h)$ とする. 紐は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$F(y) = \int_a^b \left(m\sqrt{1 + y'(x)^2}\right) gy(x)dx$$

を長さ

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} = l,$$

両端 $y(a) = h, y(b) = h$ という条件のもとで最小化する問題を考えれば良い.

### 12.1　凸汎関数に対する最適性十分条件

固定端変分問題と同様に, 特に目的関数の汎関数が凸の場合, 最適性十分条件が求まる.

**定理 27.** 最小化問題 $(P)$ において, $F$ の被積分関数 $f$ が凸とする. $F$ と $G$ の被積分関数 $f$, $g$ とある定数 $\lambda$ を用いて, $\tilde{f} = f + \lambda g$ としたとき, $\lambda g$ が凸で, 関数 $\bar{y}$ が

$$\frac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)],\ y(a) = A, y(b) = B,$$
$$\int_a^b g(x, y(x), y'(x))dx = l$$

の解ならば, $\bar{y}$ は $(P)$ の大域最小解である.

**補足.** 上記の $\tilde{f} = f + \lambda g$ を**ラグランジュ関数**と呼ぶ.

証明. 汎関数 $\tilde{F}$ を $\tilde{F}(y) = \int_a^b \tilde{f}[y(x)]dx$ とおくと, $\tilde{f}$ が凸なので, $\tilde{F}$ も凸関数になる. よって $\tilde{F}$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解 $\bar{y}$ は $u(a) = A, u(b) = B$ を満たす関数に対して,

$$\tilde{F}(u) \geq \tilde{F}(\bar{y})$$

を満たす. この不等式の両辺を計算すると

$$\tilde{F}(u) = \int_a^b \tilde{f}[u(x)]dx = F(u) + \lambda G(u) \geq \tilde{F}(\bar{y}) = F(\bar{y}) + \lambda G(\bar{y})$$

を得る.

ここで, 問題 $(P)$ の制約を満たす $y$ を任意に取る. すると $y(a) = A, y(b) = B$ より, 上記の不等式を満たし, さらに $G(y) = l$ も満たすので, 不等式の両辺から $G(y) = G(\bar{y}) = l$ を引き, $F(y) \geq F(\bar{y})$ を得る. これは $\bar{y}$ が問題の大域最小解であることを表す. □

## 12.2 一般の汎関数に対する最適性必要条件

固定端変分問題と同様に, 一般の汎関数に対しても次の主張が言える.

**定理 28.** $\bar{y} \in C$ を問題 $(P)$ の局所最小解とする. すると, ある $\lambda$ が存在して, $\tilde{f} = f + \lambda g$ に対するオイラー・ラグランジュの方程式を満たす. 言い換えると,

$$\frac{d}{dx}\tilde{f}_z[\bar{y}(x)] = \tilde{f}_y[\bar{y}(x)]$$

が成り立つ.

**補足.** オイラー・ラグランジュ方程式と制約を満たす関数を**停留関数**と呼ぶ.

証明. 省略する. □

## 12.3 解法例

**例 28.**

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &:= \int_0^1 y'(x)^2 dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 y(x)dx = 1,\ y(0) = y(1) = 0 \end{aligned}$$

問題の停留関数を求める. 目的関数と制約関数の被積分関数は $f(x,y,z) = z^2, g(x,y,z) = y$ なので, ラグランジュ関数はある定数 $\lambda$ に体して, $\tilde{f} = z^2 + \lambda y$ となる. $\tilde{f}_z = 2z, \tilde{f}_y = \lambda$ なので, オイラー・ラグランジュ方程式 $\frac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)]$ は

$$\frac{d}{dx}\{2y'(x)\} = \lambda$$

となる. 両辺を積分すると $y'(x) = \lambda/2x + c_1$ ($c_1$ は任意定数) を得る. さらに両辺を積分すると, オイラー・ラグランジュ方程式の解は

$$y(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x + c_2$$

となることがわかる ($c_2$ は任意定数). ここで, $y(0) = 0$ より $c_2 = 0$, $y(1) = 0$ より $\lambda/4 + c_1 = 0$ 得る. さらに停留関数は制約 $\int_0^2 y(x)dx = 1$ を満たす必要があるので, $\lambda/12 + c_1/2 = 1$ を得る. 連立方程式を解くことにより, $\lambda = -24, c_1 = 6$ を得る. よって, 問題の停留関数は $y(x) = -6x^2 + 6x$ となる.

なお, $\lambda = -24$ に対して, ラグランジュ関数はに対して凸になっているので, 上記の停留関数は問題の大域最小解になる.