# 13　有名な変分問題の解

自然に現れる変分問題の解析解を求めるのは一般に難しい. しかし解析解を求められる有名な問題があるので, 解法は技巧的にはなるが, それらを見ていこう.

## 13.1　最速降下線（9 節の例 19）

$$
\text{最小化}\ F(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}dx
$$

$$
y(0) = 0, y(a) = A
$$

汎関数の被積分関数は

$$
f(x,y,z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{2gy}}
$$

となる. ここで, 被積分関数が $x$ に依存していないことに注目して, オイラー・ラグランジュの方程式

$$
\frac{d}{dx}f_z[y(x)] = f_y[y(x)]
$$

を変形する. 両辺に $y'(x)$ を掛けて, $\frac{d}{dx}\{y'(x)f_z[y(x)]\} = y''(x)f_z[y(x)]+y'(x)\frac{d}{dx}f_z[y(x)]$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
0 &= y'(x)\frac{d}{dx}f_z[y(x)] - y'(x)f_y[y(x)] \\
&= \frac{d}{dx}\{y'(x)f_z[y(x)]\} - y''(x)f_z[y(x)] - y'(x)f_y[y(x)]
\end{aligned}
$$

を得る. また, $f$ は $x$ に依存しないことより, $\frac{d}{dx}f(x,y(x),y'(x)) = f_y[y(x)]y'(x) + f_z[y(x)]y''(x)$ となるので,

$$
\frac{d}{dx}\{y'(x)f_z[y(x)]\} - \frac{d}{dx}f[y(x)] = 0
$$

を得る. よって不定積分をすると,

$$
y'(x)f_z[y(x)] - f[y(x)] = c_1(\ c_1\ \text{は定数})
$$

が成り立つ (これは被積分関数が $x$ に依存しない場合に一般に成り立つ式である).
ここで,

$$
f_z(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{2gy(1+z^2)}}
$$

を代入すると,

$$
c_1 = \frac{y'(x)^2}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}}
$$

を得る. 従って, 両辺を自乗して $y'(x)$ について解くと, $y(x) \neq 0$ $(x \neq 0)$ で,

$$y'(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1}$$

が成り立つ. いま, $y'(x)$ は負ではない (途中で上に上る経路は最速ではない) と仮定してよいだろう. ここで, $y = \frac{1}{4gc_1^2}(1-\cos t)$ と変数変換をする. いま, $y(x)$ は単調増加なので $0 \leq t < \frac{1}{2\pi}$ となるように選ぶ. よって, $t \neq 0$ で

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos t} - 1} = \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{1-\cos t} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

となる. 特に $t \neq 0$ で, $\frac{dy}{dx} \neq 0$ なので逆関数が存在し, また, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4gc_1^2}\sin t$ も 0 でないので, パラメータ表示された変数の微分公式を用いると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$$

より,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{\sin t}{4gc^2}}{\frac{\sin t}{1-\cos t}} = \frac{1-\cos t}{4gc^2}$$

を得る. よって, 不定積分を計算すると,

$$x = \frac{1}{4gc_1^2}(t - \sin t) + c_2(\ c_2 \text{ は定数})$$

が成り立つ. したがって, オイラー・ラグランジュ方程式の解は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4gc_1^2}(t-\sin t) + c_2 \\ y = \frac{1}{4gc_1^2}(1-\cos t) \end{cases}$$

となる. 条件 $y(0) = 0, y(a) = A$ より定数 $c_1, c_2$ を決めることができる. 改めて $\frac{1}{4gc_1^2} = c$ とおくと,

$$\begin{cases} x = c(t-\sin t) \\ y = c(1-\cos t) \end{cases}$$

となる. 最速降下線はサイクロイドであることが分かる.

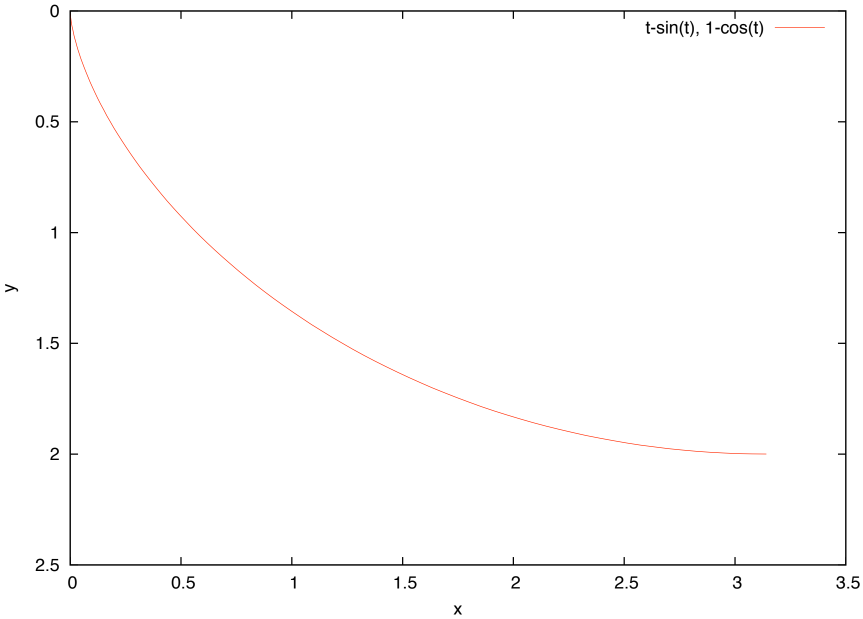


図 7: 最速降下線: サイクロイド $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$

## 13.2　懸垂線（11 節の例 25）

$$最小化\ F(y) = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx$$
$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}dx = l,\ y(a)=0, y(b)=0$$

$F$ と $G$ の被積分関数はそれぞれ,

$$f(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2},\ g(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$$

となるので, ある数 $\lambda$ について,

$$\tilde{f}(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2} + \lambda\sqrt{1+z^2}$$

とおいて, オイラー・ラグランジュ方程式を解く. 最速降下線の場合と同じように, $\tilde{f}$ は $x$ に依存していないので,

$$y'(x)\tilde{f}_z[y(x)] - \tilde{f}[y(x)] = c\ (\ c\ は定数)$$

が成り立つ.

$$\tilde{f}_z(x,y,z) = \frac{yz+\lambda z}{\sqrt{1+z^2}}$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} c &= y'(x)\frac{y(x)y'(x)+\lambda y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} - y(x)\sqrt{1+y'(x)^2} - \lambda\sqrt{1+y'(x)^2} \\ &= \frac{-(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \end{aligned}$$

となるので, $y'(x)$ について整理すると,

$$y'(x) = \pm\sqrt{\frac{(y+\lambda)^2}{c^2} - 1}$$

ここで, $u(x) = y(x) + \lambda$ とおくと,

$$u'(x) = \pm\sqrt{\frac{u(x)^2}{c^2} - 1}$$

となるので, 変数分離形の微分方程式になる. よって解は,

$$\log\left|\frac{1}{c}u + \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}\right| = \pm\frac{x+d}{c}\ (\ d\ は定数)$$

を満たす．よって，

$$\frac{1}{c}u + \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1} = \exp\left\{\pm\frac{x+d}{c}\right\}$$

となり，これを $u$ について解くと，

$$u(x) = \frac{1}{c}\frac{e^{\pm\frac{x+d}{c}} + e^{\mp\frac{x+d}{c}}}{2}$$

を得る．$u(x) = y(x) + \lambda$ を代入すると，どちらの符号をとっても，

$$y(x) = \frac{1}{c}\cosh\left(\frac{x+d}{c}\right) - \lambda$$

が成り立つことが分かる．$c, d, \lambda$ は制約条件が成り立つように決めれば良い．

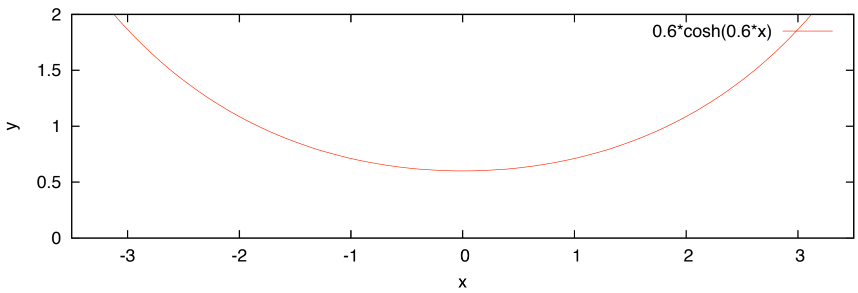


図 8: 懸垂線