6.4　不等式制約問題

制約付き最適化問題は以下のような一般型をもつ.

$$
\begin{aligned}
(P)\ \text{最小化}\ & f(x) \\
\text{制約}\ & x \in C
\end{aligned}
$$

今まで, 制約 C が区間と等式で定義される場合を扱ってきたが, 一般的に等式と不等式を制約に持つ場合を考える.

例 16 (射影問題)**.** 平面 $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$ と単位球の内部 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ との共通部分の点で, 点 $(2, 3, 4)$ までの距離が一番近い点を求めたいとする. するとこの問題は

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\ & f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 4)^2 \\
\text{制約}\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2
\end{aligned}
$$

と書ける. この実行可能領域を C で表すと, これは $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, $h(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2$ とおくことによって,

$$
C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x_1, x_2, x_3) \leq 0, h(x_1, x_2, x_3) = 0\}
$$

と書ける. この問題の最適解は点 $(2, 3, 4)$ の集合 C への**射影**と呼ばれる.

6.5　不等式が一つの場合

$$
\begin{aligned}
(P)\ \text{最小化}\ & f(x, y) := x + y \\
\text{制約}\ & g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0
\end{aligned}
$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ を上の最適化問題の局所最小解とすると, 次の二つの場合が考えられる;

(1). $(\bar{x}, \bar{y})$ が円の内部にある $(g(\bar{x}, \bar{y}) < 0)$ ときは, $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ が成り立つ (通常の停留点).

(解説) $g(x, y) < 0$ をみたす (x, y) は, $(\bar{x}, \bar{y})$ の近くですべての方向に存在する. また局所最小解の定義より, $f(x, y) \geq f(\bar{x}, \bar{y})$ が成り立つ. よって, $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ が成り立つ.

(2). $(\bar{x}, \bar{y})$ が円周上にある $(g(\bar{x}, \bar{y}) = 0)$ ときは, $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}), \lambda \in \mathbb{R}$ が成り立つ (円周に関する停留点).

(解説) (x, y) を円周に制限しても $(\bar{x}, \bar{y})$ は局所最小解である.

二つの場合をまとめて書くと,

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \\
\lambda g(\bar{x}, \bar{y}) &= 0
\end{aligned}
$$

と書ける．さらに (2) の場合, 不等式の特性を活かすとラグランジュ乗数 λ の符号を制限することができる.

いま, $\nabla g(\bar{x}, \bar{y})$ は g の値が増える方向である． 従って, 実行可能領域が $C = \{(x, y)\colon g(x, y) \leq 0\}$ であることを考えると, $\nabla g(\bar{x}, \bar{y})$ は領域 C の外側を向き, 境界に直交した方向になっている．一方 $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ は目的関数 f の値が減る方向なので, それも領域 C の外側を向いていることになる．従って,

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \\
\lambda g(\bar{x}, \bar{y}) &= 0,\ \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

となる.

定理 12. 最小化問題

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\ & f(x) \\
\text{制約}\ & g(x) \leq 0
\end{aligned}
$$

に対して, $\bar{x}$ が局所最小解ならば, ある数 λ が存在して,

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}) &= \lambda \nabla g(\bar{x}) \\
\lambda g(\bar{x}) &= 0 \\
\lambda \geq 0,\ & g(\bar{x}) \leq 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

6.6 制約式が複数あるとき

$$
\begin{aligned}
(P)\ \text{最小化}\ & f(x, y) := x + y \\
\text{制約}\ & g_1(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\
& g_2(x, y) := -y \leq 0
\end{aligned}
$$

で, $(\bar{x}, \bar{y})$ を局所最小解とする．$C = \{(x, y)\colon g_1(x, y) \leq 0, g_2(x, y) \leq 0\}$ とおくと, 以下三つの場合がある.

(1). $(\bar{x}, \bar{y})$ が C の内部にあるときは, $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

(2). $(\bar{x}, \bar{y})$ が $g_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $g_2(\bar{x}, \bar{y}) < 0$ をみたす場合, $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y})$ かつ $\lambda_1 \geq 0$.

(3). $(\bar{x}, \bar{y})$ が $g_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $g_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ をみたす場合, $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y})$ かつ $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

(解説) 不等式一つの場合と同様に考えると, 目的関数 f の減少する方向 $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ は領域 C の外側を向いている. これは $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ が二つのベクトル $\nabla g_1(\bar{x}, \bar{y})$ と $\nabla g_2(\bar{x}, \bar{y})$ に挟まれた方向にあるということである.

三つの場合をまとめて書くと,

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_2 \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \\
\lambda_i g_i(\bar{x}, \bar{y}) &= 0,\ \lambda_i \geq 0\ (i = 1, 2)
\end{aligned}
$$

となる. 一般には次のような定理を得る.

定理 13. 最小化問題

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\ & f(x) \\
\text{制約}\ & g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0 \\
& h_1(x) = 0, \ldots, h_l(x) = 0
\end{aligned}
$$

に対して, $\bar{x}$ が局所最小解であり $\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x})\}$ が一次独立であるとする. すると, ある数 λ_i, μ_i が存在して,

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}) &= \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{x}) \\
\lambda_i g_i(\bar{x}) &= 0,\ \lambda_i \geq 0,\ \mu_j : \text{任意} \\
g_i(\bar{x}) &\leq 0,\ h_j(\bar{x}) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ. この条件式を**一次の最適性必要条件**と呼ぶ.

補足. λ_i に関する条件を, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$ と内積を用いて,

$$
\langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle = 0,\ \lambda \geq 0, g(\bar{x}) \leq 0
$$

とも書く. これを**相補性条件**と呼ぶ.

6.7 例題

次の最小化問題を解く.

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\ & f(x, y) = x^2 + 6xy + y^2 \\
\text{制約}\ & C = \{(x, y) \colon g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}
\end{aligned}
$$

まず, 一次の最適性必要条件を書くと,

$$(*)\quad \begin{cases} -\begin{bmatrix} 2x+6y \\ 6x+2y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \\ \lambda(x^2+y^2-1)=0,\ \lambda \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

となる. 以下場合分けで解く.

$x^2+y^2-1<0$ の場合, $(*)$ を満たすものは $\lambda=0$, $(x,y)=(0,0)$ となる.

$x^2+y^2-1=0$ の場合を考える. まず,

$$-\begin{bmatrix} 2x+6y \\ 6x+2y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix},\ x^2+y^2-1=0$$

を見たす点 (等式の場合と同じ) を探すと, $(\lambda,x,y)=(2,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}),(-4,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ となる. よって, $\lambda \geq 0$ となるのは, 前者である.

よって一次の最適性必要条件を見たす点は, $(x,y)=(0,0),(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ となるので, それぞれにおける目的関数 f の値を調べると, 最小値は $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})=-2$ となる.

例 17. 最適化問題

$$\begin{aligned} \text{最小化}\ & f(x_1,x_2,x_3) := (x_1-2)^2+(x_2-3)^2+(x_3-4)^2 \\ \text{制約}\ & x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1 \\ & 4x_1+x_2+2x_3=2 \end{aligned}$$

の一次の最適性必要条件を求めよ.

解答. 定理より,

$$\begin{cases} -\begin{bmatrix} 2x_1-4 \\ 2x_2-6 \\ 2x_3-8 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda(x_1^2+x_2^2+x_3-1)=0, \lambda \geq 0, \mu: \text{任意} \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-1 \leq 0, 4x_1+x_2+2x_3-2=0 \end{cases}$$

□