6.8 凸計画

目的関数も制約式もすべて凸関数である問題を**凸計画**と呼ぶ．凸計画は有用な性質を持っている．

定理 14.

$$
\begin{aligned}
(P)\ \text{最小化}\ & f(x) \\
\text{制約}\ & g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m
\end{aligned}
$$

で, f, g_i が凸関数であるとする．$\bar{x}$ が一次の最適性必要条件を満たせば $\bar{x}$ は (P) の大域最小解である．

Proof. f は凸関数なので,

$$f(x) - f(\bar{x}) \ge \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

が成り立つ．また, $\bar{x}$ は一次の最適性必要条件を満たすので, ある $\lambda_i \ge 0$ が存在して,

$$\nabla f(\bar{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x})$$

が成り立ので,

$$f(x) - f(\bar{x}) \ge -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

を得る．ここで右辺が 0 以上になることを示す．まず, g_i も凸関数なので

$$g_i(x) - g_i(\bar{x}) \ge \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

が成り立つ．いま x を実行可能解とすると $g_i(x) \le 0$ となる．$g_i(\bar{x}) = 0$ のときは,

$$0 \ge g_i(x) = g_i(x) - g_i(\bar{x}) \ge \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

なので, $-\lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \ge 0$ となる．また, $g_i(\bar{x}) \le 0$ のときは, $\lambda_i = 0$ なので, $-\lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = 0$ となる．したがって, 任意の実行可能界 x に対して, $f(x) - f(\bar{x}) \ge 0$ である． □

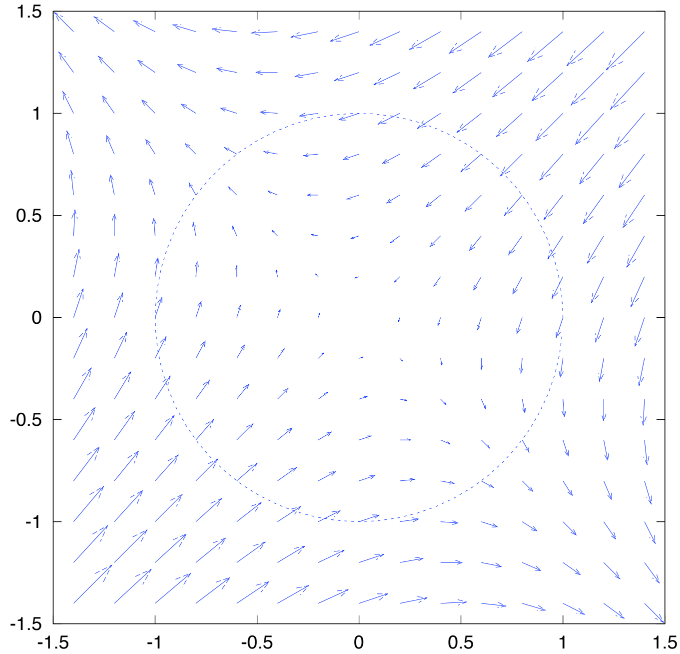

図 4: $x^2 + 6xy + y^2$ の $(-1)\times$ 勾配ベクトル

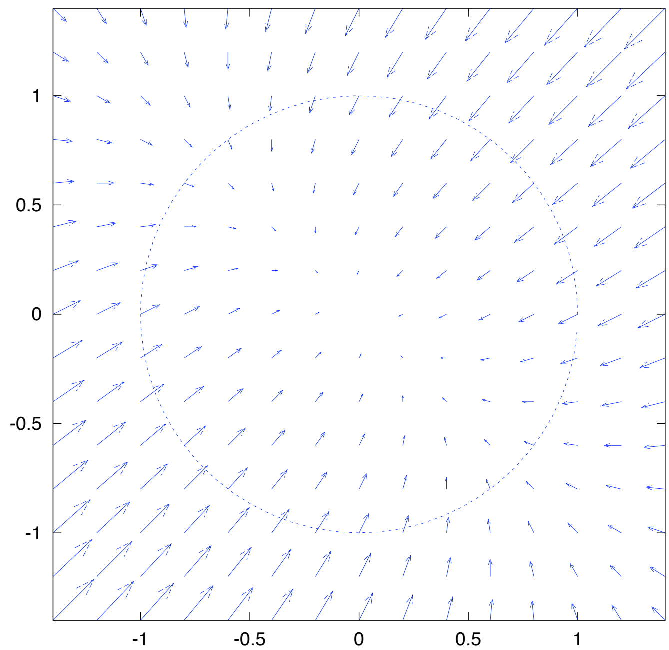

図 5: $x^2 + xy + y^2$ の $(-1)\times$ 勾配ベクトル

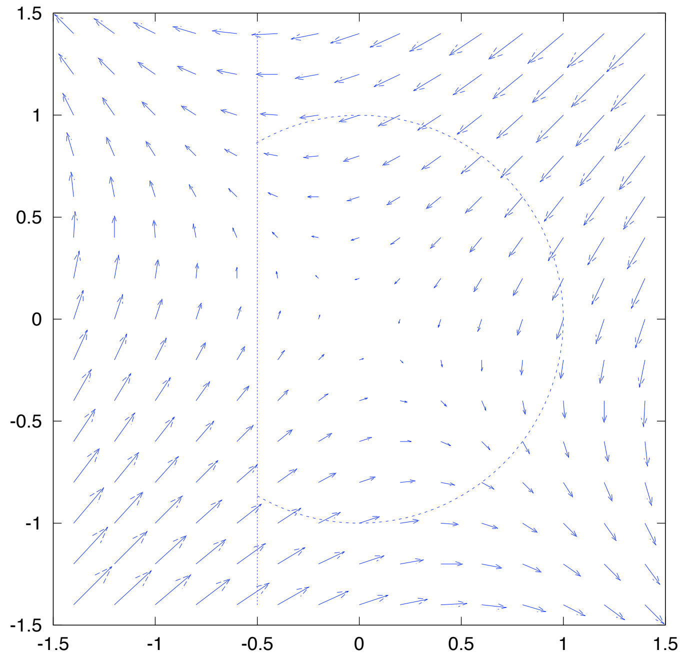

図 6: $x^2+6xy+y^2$ の $(-1)\times$ 勾配ベクトル 制約 $x^2+y^2-1\le 0, -x\le 0.5$

7 ラグランジュ双対問題

最小化問題

$$\begin{aligned} (P)\ \text{最小化}\ & f(x) \\ \text{制約}\ & g_1(x)\le 0,\dots,g_m(x)\le 0 \\ & h_1(x)=0,\dots,h_l(x)=0 \end{aligned}$$

に対して,

$$L(x,\lambda,\mu)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\mu_j h_j(x)$$

を**ラグランジュ関数**と呼ぶ．ここで，記号をいくつか用意する．実行可能領域を $C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid g_i(x)\le 0, h_j(x)=0\}$, (P) の最小値を $\min(P)$ とおく．また $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ とし, $\lambda\ge 0$ は $\lambda_i\ge 0$ $(i=1,\dots,m)$ を意味する．すると,

$$\sup_{\lambda\ge 0,\mu} L(x,\lambda,\mu)=\begin{cases} f(x) & x\in C \\ \infty & x\notin C \end{cases}$$

となる．(sup は上限を表す．上限の定義は微積の本に載っているが，ここでは max と同じようなもので, ∞ にもなり得るものと理解しておけば十分である) よって,

$$\min(P)=\min_{x\in C} f(x)=\min_{x}\sup_{\lambda\ge 0,\mu} L(x,\lambda,\mu)$$

が成り立つ. ここで, "$\min_x$" は x に制約がないことを意味する. また,

$$\ell(\lambda, \mu) = \min_x L(x, \lambda, \mu)$$

とおく. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について,

$$\sup_{\lambda \geq 0, \mu} L(x, \lambda, \mu) \geq \sup_{\lambda \geq 0, \mu} \ell(\lambda, \mu)$$

となるので,

$$\min_x \sup_{\lambda \geq 0, \mu} L(x, \lambda, \mu) \geq \sup_{\lambda \geq 0, \mu} \ell(\lambda, \mu) = \sup_{\lambda \geq 0, \mu} \min_x L(x, \lambda, \mu)$$

が成り立つ. (min と sup を交換 !)

ここで, 次の様な最大化問題 (D) を考える.

$$\begin{aligned} (D)\ \text{最大化}\ & \ell(\lambda, \mu) \\ \text{制約}\ & \lambda_i \geq 0, \mu_j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

この最大化問題 (D) を (P) の**ラグランジュ双対問題**と呼ぶ. (D) の最大値を $\max(D)$ と書く. すると,

$$\min(P) \geq \max(D)$$

が成り立つ. (P) よりも (D) のほうが簡単な問題になる場合があり. 特に (D) を解くことで (P) の最小値の下界値が分かる.

定理 15. f, g_i が凸, h_j が一次関数で, $g_i(x_0) < 0, h_j(x_0) = 0$ を満たす x_0 が存在すれば, $\min(P) = \max(D)$ が成り立つ.

例 18 (線形計画問題)**.**

$$\begin{aligned} (P)\ \text{最小化}\ & c^T x \\ \text{制約}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

のラグランジュ双対問題を求める.

$$L(x, \lambda, \mu) = c^T x + \lambda^T(-x) + \mu^T(Ax - b)$$

とおく.

$$\min(P) = \min_x \sup_{\lambda \geq 0, \mu} L(x, \lambda, \mu) \geq \sup_{\lambda \geq 0, \mu} \min_x L(x, \lambda, \mu)$$

が成り立つ. よって, ラグランジュ双対問題は

$$\begin{aligned} (D)\ \text{最大化}\ & \min_x L(x, \lambda, \mu) \\ \text{制約}\ & \lambda_i \geq 0, \mu_j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

と書ける．さらに,

$$\min_x L(x,\lambda,\mu) = \min_x \left[(c-\lambda+A\mu^T)^T x - \mu^T b\right] = \begin{cases} -\mu^T b & c-\lambda+A\mu^T = 0 \\ -\infty & c-\lambda+A\mu^T \neq 0 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} (D)\ \text{最大化}\ & -\mu^T b \\ \text{制約}\ & A\mu^T - \lambda + c = 0 \\ & \lambda_i \geq 0, \mu_j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

となる．ここから λ が消去できるので,

$$\begin{aligned} (D)\ \text{最大化}\ & -\mu^T b \\ \text{制約}\ & A\mu^T + c \geq 0 \\ & \mu_j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

を得る．