

10 制約付き変分問題

今回は

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &:= \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \\ \text{制約 } y(a) &= A, y(b) = B \end{aligned}$$

のような変分問題に対して、最適解を求める手法を学んだ。この種の問題を固定端変分問題と呼ぶ。

固定端変分問題は、実質的に制約がないように扱うことができた。今回はより明確な制約を持つ変分問題を扱う。

以下のような制約を持つ問題を考える：

$$\begin{aligned} (P) \text{ 最小化 } F(y) &:= \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx = l, y(a) = A, y(b) = B \end{aligned}$$

例 26. 高さ h で、長さ l 、密度 m の紐の両端を固定したときの紐の形を求める。 x 座標を水平方向、 y 座標を垂直方向として、紐の形を $y(x)$ という関数で表し、紐の両端を $(a, h), (b, h)$ とする。紐は位置エネルギーを最小にするような形をとるので、位置エネルギー

$$F(y) = \int_a^b \left(m \sqrt{1 + y'(x)^2} \right) gy(x) dx$$

を長さ

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} = l,$$

両端 $y(a) = h, y(b) = h$ という条件のもとで最小化する問題を考えれば良い。

10.1 凸汎関数に対する最適性十分条件

固定端変分問題と同様に、特に目的関数の汎関数が凸の場合、最適性十分条件が求まる。

定理 25. 最小化問題 (P) において、 F の被積分関数 f が凸とする。 F と G の被積分関数 f, g とある定数 λ を用いて、 $\tilde{f} = f + \lambda g$ としたとき、 λg が凸で、関数 \bar{y} が

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tilde{f}_z[y(x)] &= \tilde{f}_y[y(x)], y(a) = A, y(b) = B, \\ \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx &= l \end{aligned}$$

の解ならば、 \bar{y} は (P) の大域最小解である。

補足. 上記の $\tilde{f} = f + \lambda g$ を**ラグランジュ関数**と呼ぶ.

証明. 汎関数 \tilde{F} を $\tilde{F}(y) = \int_a^b \tilde{f}[y(x)]dx$ とおくと, \tilde{f} が凸なので, \tilde{F} も凸関数になる. よって \tilde{F} に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解 \bar{y} は $u(a) = A, u(b) = B$ を満たす関数に対して,

$$\tilde{F}(u) \geq \tilde{F}(\bar{y})$$

を満たす. この不等式の両辺を計算すると

$$\tilde{F}(u) = \int_a^b \tilde{f}[u(x)]dx = F(u) + \lambda G(u) \geq \tilde{F}(\bar{y}) = F(\bar{y}) + \lambda G(\bar{y})$$

を得る.

ここで, 問題 (P) の制約を満たす y を任意に取る. すると $y(a) = A, y(b) = B$ より, 上記の不等式を満たし, さらに $G(y) = l$ も満たすので, 不等式の両辺から $G(y) = G(\bar{y}) = l$ を引き, $F(y) \geq F(\bar{y})$ を得る. これは \bar{y} が問題の大域最小解であることを表す. \square

10.2 一般の汎関数に対する最適性必要条件

固定端変分問題と同様に, 一般の汎関数に対しても次の主張が言える.

定理 26. $\bar{y} \in C$ を問題 (P) の局所最小解とする. すると, ある λ が存在して, $\tilde{f} = f + \lambda g$ に対するオイラー・ラグランジュの方程式を満たす. 言い換えると,

$$\frac{d}{dx} \tilde{f}_z[\bar{y}(x)] = \tilde{f}_y[\bar{y}(x)]$$

が成り立つ.

補足. オイラー・ラグランジュ方程式と制約を満たす関数を**停留関数**と呼ぶ.

証明. 省略する. \square

10.3 解法例

例 27.

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &:= \int_0^1 y'(x)^2 dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 y(x) dx = 1, \quad y(0) = y(1) = 0 \end{aligned}$$

問題の停留関数を求める. 目的関数と制約関数の被積分関数は $f(x, y, z) = z^2, g(x, y, z) = y$ なので, ラグランジュ関数はある定数 λ に体して, $\tilde{f} = z^2 + \lambda y$ となる. $\tilde{f}_z = 2z, \tilde{f}_y = \lambda$ なので, オイラー・ラグランジュ方程式 $\frac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)]$ は

$$\frac{d}{dx}\{2y'(x)\} = \lambda$$

となる. 両辺を積分すると $y'(x) = \lambda/2x + c_1$ (c_1 は任意定数) を得る. さらに両辺を積分すると, オイラー・ラグランジュ方程式の解は

$$y(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + c_1x + c_2$$

となることがわかる (c_2 は任意定数). ここで, $y(0) = 0$ より $c_2 = 0, y(1) = 0$ より $\lambda/4 + c_1 = 0$ 得る. さらに停留関数は制約 $\int_0^2 y(x)dx = 1$ を満たす必要があるので, $\lambda/12 + c_1/2 = 1$ を得る. 連立方程式を解くことにより, $\lambda = -24, c_1 = 6$ を得る. よって, 問題の停留関数は $y(x) = -6x^2 + 6x$ となる.

なお, $\lambda = -24$ に対して, ラグランジュ関数には対して凸になっているので, 上記の停留関数は問題の大域最小解になる.

練習問題 11. 変分問題の停留関数を求めよ.

(i).

$$\begin{aligned} \text{最小化 } J(y) &:= \int_0^1 \{4y(x) + y'(x)^2\} dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 xy(x) dx = 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 1/12 \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} \text{最小化 } J(y) &:= \int_0^1 y'(x)^2 dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 xy'(x) dx = 5, \quad y(0) = 1, y(1) = 10 \end{aligned}$$

(iii).

$$\begin{aligned} \text{最小化 } J(y) &:= \int_0^1 \{\sin^3 x + y(x)^2\} dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 xy(x)^{4/3} dx = 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 2^{3/2} \end{aligned}$$