

11 有名な変分問題の解

自然に現れる変分問題の解析解を求めるのは一般に難しい。しかし解析解を求められる有名な問題があるので、解法は技巧的にはなるが、それらを見ていこう。

11.1 最速降下線 (8 節の例 20)

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &= \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}} dx \\ y(0) &= 0, y(a) = A \end{aligned}$$

汎関数の被積分関数は

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{2gy}}$$

となる。ここで、被積分関数が x に依存していないことに注目して、オイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

を变形する。両辺に $y'(x)$ を掛けて、 $\frac{d}{dx}\{y'(x)f_z[y(x)]\} = y''(x)f_z[y(x)] + y'(x)\frac{d}{dx}f_z[y(x)]$ に注意すると、

$$\begin{aligned} 0 &= y'(x) \frac{d}{dx} f_z[y(x)] - y'(x) f_y[y(x)] \\ &= \frac{d}{dx} \{y'(x) f_z[y(x)]\} - y''(x) f_z[y(x)] - y'(x) f_y[y(x)] \end{aligned}$$

を得る。また、 f は x に依存しないことより、 $\frac{d}{dx} f(x, y(x), y'(x)) = f_y[y(x)]y'(x) + f_z[y(x)]y''(x)$ となるので、

$$\frac{d}{dx} \{y'(x) f_z[y(x)]\} - \frac{d}{dx} f[y(x)] = 0$$

を得る。よって不定積分をすると、

$$y'(x) f_z[y(x)] - f[y(x)] = c_1 \quad (c_1 \text{ は定数})$$

が成り立つ (これは被積分関数が x に依存しない場合に一般に成り立つ式である)。ここで、

$$f_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{2gy(1+z^2)}}$$

を代入すると、

$$c_1 = \frac{y'(x)^2}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}}$$

を得る. 従って, 両辺を自乗して $y'(x)$ について解くと, $y(x) \neq 0$ ($x \neq 0$) で,

$$y'(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1}$$

が成り立つ. いま, $y'(x)$ は負ではない (途中で上に上る経路は最速ではない) と仮定してよいだろう. ここで, $y = \frac{1}{4gc_1^2}(1 - \cos t)$ と変数変換をする. いま, $y(x)$ は単調増加なので $0 \leq t < \frac{1}{2\pi}$ となるように選ぶ. よって, $t \neq 0$ で

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos t} - 1} = \sqrt{\frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{1 - \cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

となる. 特に $t \neq 0$ で, $\frac{dy}{dx} \neq 0$ なので逆関数が存在し, また, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4gc_1^2} \sin t$ も 0 でないので, パラメータ表示された変数の微分公式を用いると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$$

より,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{\sin t}{4gc^2}}{\frac{\sin t}{1 - \cos t}} = \frac{1 - \cos t}{4gc^2}$$

を得る. よって, 不定積分を計算すると,

$$x = \frac{1}{4gc_1^2}(t - \sin t) + c_2 \quad (c_2 \text{ は定数})$$

が成り立つ. したがって, オイラー・ラグランジュ方程式の解は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4gc_1^2}(t - \sin t) + c_2 \\ y = \frac{1}{4gc_1^2}(1 - \cos t) \end{cases}$$

となる. 条件 $y(0) = 0, y(a) = A$ より定数 c_1, c_2 を決めることができる. 改めて $\frac{1}{4gc_1^2} = c$ とおくと,

$$\begin{cases} x = c(t - \sin t) \\ y = c(1 - \cos t) \end{cases}$$

となる. 最速降下線はサイクロイドであることが分かる.

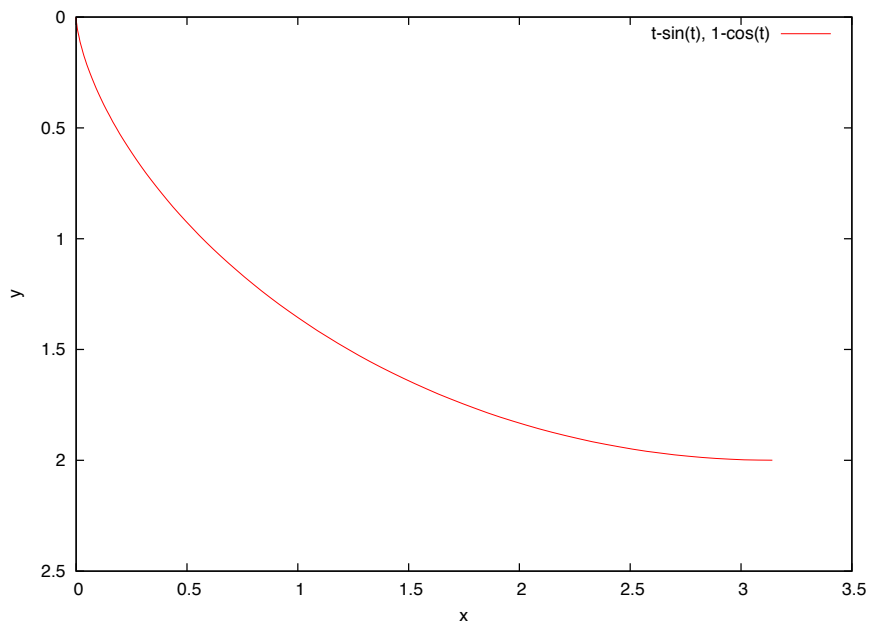


図 6: 最速降下線: サイクロイド $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$

11.2 懸垂線 (10 節の例 26)

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &= \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \\ G(y) &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = l, \quad y(a) = 0, y(b) = 0 \end{aligned}$$

F と G の被積分関数はそれぞれ,

$$f(x, y, z) = y\sqrt{1 + z^2}, \quad g(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$$

となるので, ある数 λ について,

$$\tilde{f}(x, y, z) = y\sqrt{1 + z^2} + \lambda\sqrt{1 + z^2}$$

において, オイラー・ラグランジュ方程式を解く. 最速降下線の場合と同じように, \tilde{f} は x に依存していないので,

$$y'(x)\tilde{f}_z[y(x)] - \tilde{f}[y(x)] = c \quad (c \text{ は定数})$$

が成り立つ.

$$\tilde{f}_z(x, y, z) = \frac{yz + \lambda z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} c &= y'(x) \frac{y(x)y'(x) + \lambda y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} - \lambda\sqrt{1 + y'(x)^2} \\ &= \frac{-(y + \lambda)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \end{aligned}$$

となるので, $y'(x)$ について整理すると,

$$y'(x) = \pm \sqrt{\frac{(y + \lambda)^2}{c^2} - 1}$$

ここで, $u(x) = y(x) + \lambda$ とおくと,

$$u'(x) = \pm \sqrt{\frac{u(x)^2}{c^2} - 1}$$

となるので, 変数分離形の微分方程式になる. よって解は,

$$\log \left| \frac{1}{c} u + \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1} \right| = \pm \frac{x + d}{c} \quad (d \text{ は定数})$$

を満たす. よって,

$$\frac{1}{c}u + \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1} = \exp\left\{\pm \frac{x+d}{c}\right\}$$

となり, これを u について解くと,

$$u(x) = \frac{1}{c} \frac{e^{\pm \frac{x+d}{c}} + e^{\mp \frac{x+d}{c}}}{2}$$

を得る. $u(x) = y(x) + \lambda$ を代入すると, どちらの符号をとっても,

$$y(x) = \frac{1}{c} \cosh\left(\frac{x+d}{c}\right) - \lambda$$

が成り立つことが分かる. c, d, λ は制約条件が成り立つように決めれば良い.

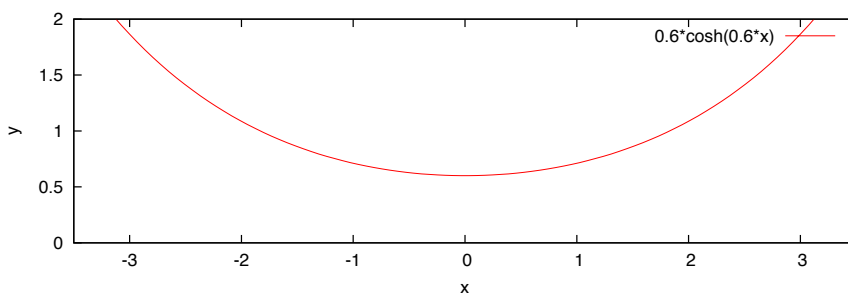


図 7: 懸垂線

練習問題 12. 変分問題の停留関数を求めよ.

(i).

$$\text{最小化 } F(y) := \int_0^1 \{y(x) + \sqrt{1 + y'(x)^2}\} dx$$

$$\text{制約 } y(0) = -1, y(1) = 0$$

(ii).

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &:= \int_0^{\pi/2} y'(x)^2 dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^{\pi/2} y'(x) \sin x dx = \frac{7}{8}\pi^2, \\ y(0) &= \pi/2, \quad y(\pi/2) = \pi^3/2 \end{aligned}$$

(iii).

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &:= \int_0^{\pi} \{2y(x) \sin x + y'(x)^2\} dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^{\pi} y(x) dx = 1 \\ y(0) &= 0, \quad y(\pi) = 0 \end{aligned}$$