6.4 不等式制約問題

制約付き最適化問題は以下のような一般型をもつ.

$$\begin{aligned}(P)\ \text{最小化}\ & f(x)\\ \text{制約}\ & x \in C\end{aligned}$$

今まで, 制約 C が区間と等式で定義される場合を扱ってきたが, 一般的に等式と不等式を制約に持つ場合を考える.

例 16 (射影問題)**.** 平面 $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$ と単位球の内部 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ との共通部分の点で, 点 $(2,3,4)$ までの距離が一番近い点を求めたいとする. するとこの問題は

$$\begin{aligned}\text{最小化}\ & f(x_1,x_2,x_3) := (x_1-2)^2 + (x_2-3)^2 + (x_3-4)^2\\ \text{制約}\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\end{aligned}$$

と書ける. この実行可能領域を C で表すと, これは $g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, $h(x_1,x_2,x_3) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2$ とおくことによって,

$$C = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x_1,x_2,x_3) \le 0, h(x_1,x_2,x_3) = 0\}$$

と書ける. この問題の最適解は点 $(2,3,4)$ の集合 C への**射影**と呼ばれる.

6.5 不等式が一つの場合

$$\begin{aligned}(P)\ \text{最小化}\ & f(x,y) := x^2 + 6xy + y^2\\ \text{制約}\ & g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \le 0\end{aligned}$$

$(\bar{x},\bar{y})$ を上の最適化問題の局所最小解とすると, 次の二つの場合が考えられる;

(1). $(\bar{x},\bar{y})$ が円の内部にある $(g(\bar{x},\bar{y}) < 0)$ ときは, $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ が成り立つ (通常の停留点).

(解説) $g(x,y) < 0$ をみたす (x,y) は, $(\bar{x},\bar{y})$ の近くですべての方向に存在する. また局所最小解の定義より, $f(x,y) \ge f(\bar{x},\bar{y})$ が成り立つ. よって, $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ が成り立つ.

(2). $(\bar{x},\bar{y})$ が円周上にある $(g(\bar{x},\bar{y}) = 0)$ ときは, $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda_0 \nabla g(\bar{x},\bar{y}), \lambda_0 \in \mathbb{R}$ が成り立つ (円周に関する停留点).

(解説) (x,y) を円周に制限しても $(\bar{x},\bar{y})$ は局所最小解である.

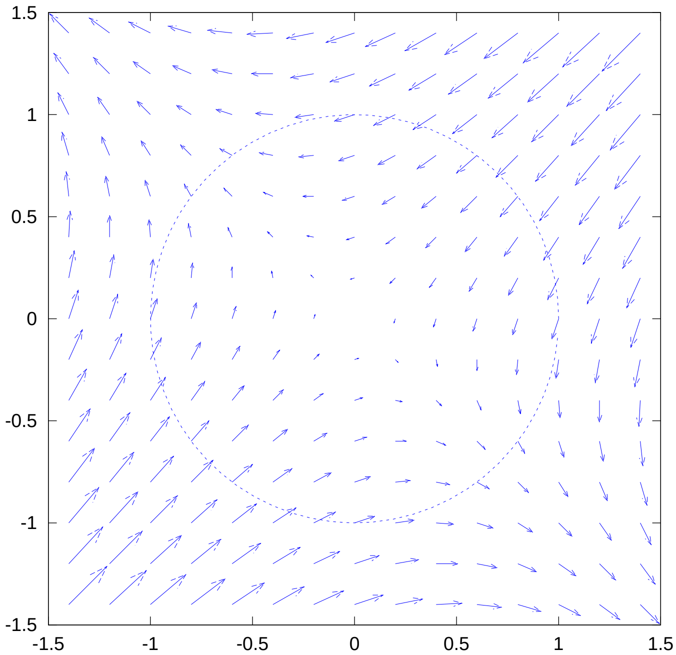

図 4: $x^2+6xy+y^2$ の $(-1)\times$ 勾配ベクトル

二つの場合をまとめて書くと,

$$\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda_0 \nabla g(\bar{x},\bar{y})$$
$$\lambda_0 g(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

と書ける. さらに (2) の場合, 不等式の特性を活かすとラグランジュ乗数 λ_0 の符号を制限することができる.

いま, ベクトル $\nabla g(\bar{x},\bar{y})$ は g の値が増える方向を向いている. 従って, 実行可能領域が $C=\{(x,y)\colon g(x,y)\le 0\}$ (図 4 の円の境界と内部) であることを考えると, $\nabla g(\bar{x},\bar{y})$ は領域 C の外側を向き, 境界に直交した方向になっている. 一方 $\{-\nabla f(\bar{x},\bar{y})\}$ は目的関数 f の値が減る方向なので, それも領域 C の外側を向いていることになる. 従って,

$$-\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda \nabla g(\bar{x},\bar{y})$$
$$\lambda g(\bar{x},\bar{y}) = 0,\ \lambda \ge 0$$

となる.

定理 12. 最小化問題

$$\text{最小化}\ f(x)$$
$$\text{制約}\ g(x) \le 0$$

に対して, $\bar{x}$ が局所最小解ならば, ある数 λ が存在して,

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}) &= \lambda \nabla g(\bar{x}) \\
\lambda g(\bar{x}) &= 0, \lambda \geq 0 \\
g(\bar{x}) &\leq 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

6.6 制約式が複数あるとき

$$
\begin{aligned}
(P)\ \text{最小化}\ & f(x,y) := x^2 + 6xy + y^2 \\
\text{制約}\ & g_1(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\
& g_2(x,y) := -x - 1/2 \leq 0
\end{aligned}
$$

で, $(\bar{x}, \bar{y})$ を局所最小解とする. $C = \{(x,y) \colon g_1(x,y) \leq 0, g_2(x,y) \leq 0\}$ とおくと, 以下三つの場合がある.

(1). $(\bar{x}, \bar{y})$ が C の内部にあるときは, $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

(2). $(\bar{x}, \bar{y})$ が $g_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $g_2(\bar{x}, \bar{y}) < 0$ をみたす場合, $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y})$ かつ $\lambda_1 \geq 0$.

(3). $(\bar{x}, \bar{y})$ が $g_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $g_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ をみたす場合, $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y})$ かつ $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

(解説) 不等式一つの場合と同様に考えると, 目的関数 f の減少する方向 $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ は領域 C の外側を向いている. これは $-\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ が二つのベクトル $\nabla g_1(\bar{x}, \bar{y})$ と $\nabla g_2(\bar{x}, \bar{y})$ に挟まれた方向にあるということである.

三つの場合をまとめて書くと,

$$
\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda_1 \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_2 \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \\
\lambda_i g_i(\bar{x}, \bar{y}) &= 0,\ \lambda_i \geq 0\ (i = 1, 2)
\end{aligned}
$$

となる.

一般には次のような定理を得る.

定理 13. 最小化問題

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\ & f(x) \\
\text{制約}\ & g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0 \\
& h_1(x) = 0, \ldots, h_l(x) = 0
\end{aligned}
$$

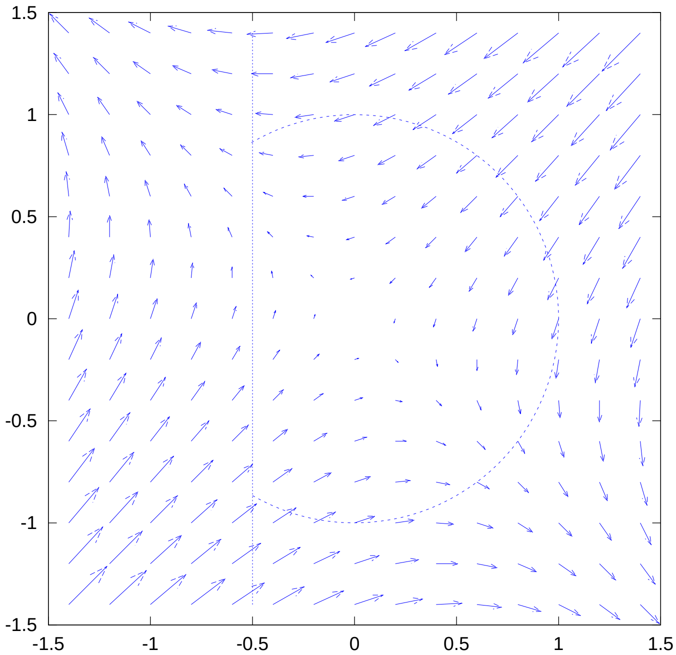

図 5: $x^2+6xy+y^2$ の $(-1)\times$ 勾配ベクトル 制約 $x^2+y^2-1\le 0, -x-1/2\le 0$

に対して, $\bar{x}$ が局所最小解であり $\{\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x})\}$ が一次独立であるとする．すると, ある数 λ_i, μ_i が存在して,

$$\begin{aligned}
-\nabla f(\bar{x}) &= \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{x}) + \mu_1 \nabla h_1(\bar{x}) + \cdots + \mu_l h_l(\bar{x}) \\
\lambda_i g_i(\bar{x}) &= 0,\ \ \lambda_i \ge 0,\ \ \mu_j : \text{任意} \\
g_i(\bar{x}) &\le 0,\ \ h_j(\bar{x}) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．この条件式を**一次の最適性必要条件**と呼ぶ.

補足. λ_i に関する条件を, ベクトル $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ と内積を用いて,

$$\langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle = 0,\ \ \lambda \ge 0, g(\bar{x}) \le 0$$

とも書く．これを**相補性条件**と呼ぶ.

6.7　例題

次の最小化問題を解く.

$$\begin{aligned}
\text{最小化}\ \ & f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2 \\
\text{制約}\ \ & C = \{(x,y) \colon g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \le 0\}
\end{aligned}$$

まず, 一次の最適性必要条件を書くと,

$$(*)\ \begin{cases} -\begin{bmatrix} 2x+6y \\ 6x+2y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \\ \lambda(x^2+y^2-1)=0,\ \lambda \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

となる. 以下場合分けで解く.

$x^2+y^2-1<0$ の場合, $(*)$ を満たすものは $\lambda=0$, $(x,y)=(0,0)$ となる.

$x^2+y^2-1=0$ の場合を考える. まず,

$$-\begin{bmatrix} 2x+6y \\ 6x+2y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix},\ x^2+y^2-1=0$$

を見たす点 (等式の場合と同じ) を探すと, $(\lambda,x,y)=(2,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}),(-4,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ となる. よって, $\lambda \geq 0$ となるのは, 前者である.

よって一次の最適性必要条件を見たす点は, $(x,y)=(0,0),(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ となるので, それぞれにおける目的関数 f の値を調べると, 最小値は $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})=-2$ となる.

例 17. 最適化問題

$$\begin{aligned} \text{最小化}\ & f(x_1,x_2,x_3) := (x_1-2)^2+(x_2-3)^2+(x_3-4)^2 \\ \text{制約}\ & x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1 \\ & 4x_1+x_2+2x_3=2 \end{aligned}$$

の一次の最適性必要条件を求めよ.

解答. 定理より,

$$\begin{cases} -\begin{bmatrix} 2x_1-4 \\ 2x_2-6 \\ 2x_3-8 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda(x_1^2+x_2^2+x_3-1)=0, \lambda \geq 0, \mu : \text{任意} \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-1 \leq 0, 4x_1+x_2+2x_3-2=0 \end{cases}$$

□

練習問題 4.

1. 以下の最小化問題の最小値を求めよ

(1)

$$\begin{aligned} \text{最小化}\ & f(x,y) = xy \\ \text{制約}\ & g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \le 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{最小化}\ & f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \\ \text{制約}\ & g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \le 0 \end{aligned}$$

2. 一次の最適性必要条件を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{最小化}\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{制約}\ & x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 1 \le 0 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

3. 原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球と平面 $x + 2y + 2z = 3$ の交点の中で, x 座標が最小となるものを求めよ.

6.8 凸計画

目的関数も制約式もすべて凸関数である問題を**凸計画**と呼ぶ．凸計画は有用な性質を持っている．

定理 14.

$$(P)\ 最小化\ f(x)$$
$$制約\ g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m$$

で, f, g_i が凸関数であるとする．$\bar{x}$ が一次の最適性必要条件を満たせば $\bar{x}$ は (P) の大域最小解である．

Proof. f は凸関数なので,

$$f(x) - f(\bar{x}) \ge \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

が成り立つ．また, $\bar{x}$ は一次の最適性必要条件を満たすので, ある $\lambda_i \ge 0$ が存在して,

$$\nabla f(\bar{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x})$$

が成り立ので,

$$f(x) - f(\bar{x}) \ge -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

を得る．ここで右辺が 0 以上になることを示す．まず, g_i も凸関数なので

$$g_i(x) - g_i(\bar{x}) \ge \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

が成り立つ．いま x を実行可能解とすると $g_i(x) \le 0$ となる．$g_i(\bar{x}) = 0$ のときは,

$$0 \ge g_i(x) = g_i(x) - g_i(\bar{x}) \ge \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

なので, $-\lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \ge 0$ となる．また, $g_i(\bar{x}) \le 0$ のときは, $\lambda_i = 0$ なので, $-\lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = 0$ となる．したがって, 任意の実行可能界 x に対して, $f(x) - f(\bar{x}) \ge 0$ である． □