7 単体法

7.1 線形計画問題

最適化問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \ & f(x) \\ \text{制約} \ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

において, 目的関数も制約式も一次式であるものを**線形計画問題**と呼ぶ. 例として次の問題を挙げる.

$$\begin{array}{rl} \text{最小化} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{制約} & x_1 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

初めに挙げた最適化問題において,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ g_1(x) &= x_1 + x_3 - 2 \\ g_2(x) &= \cdots \end{aligned}$$

などとおく. 問題 (1) は**スラック変数**と呼ばれる x_4, x_5, x_6 を導入して次の同値な問題に変形できる.

$$\begin{array}{rl} \text{最小化} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{制約} & x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

問題 (1) は行列を使うと

$$\begin{aligned} \text{最小化} \ & c^T x \\ \text{制約} \ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

のように書ける. 不等号の向きも含めこのような形の問題を線形計画問題の**不等式標準形**と呼ぶ. 同様に, 問題 (2) は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \ & c^T x \\ \text{制約} \ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

と書ける (A, b, x は適当に取り直す). このような形の問題を線形計画問題の**標準形**と呼ぶ.

すべての線形計画問題は標準形に直すことができる. 不等式は上記のようにスラック変数を用いて等式に直せる. また, $x \geq 0$ という制約がない場合は $x = x^+ - x^-, x^+ \geq 0, x^- \geq 0$ と分解して x を x^+ と x^- で置き換えることができる.

7.2 単体法の概要

線形計画問題は**単体法**と呼ばれるアルゴリズムで解くことができる. アルゴリズムの意味を説明する前に, まず単体法を用いて線形計画問題を解いてみよう. 前節の問題 (1) を例に単体法の概要を説明する.

1. スラック変数の導入

スラック変数を導入しして標準形 (2) にしたあと, スラック変数 x_4, x_5, x_6 を左辺に残し, 残りを右辺へ移項する.

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
\text{制約} & x_4 = 2 - x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 \\
& x_5 = 5 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\
& x_6 = 7 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
\tag{3}
$$

左辺に現れる変数 x_4, x_5, x_6 を**基底変数**, 右辺に現れる変数 x_1, x_2, x_3 を**非基底変数**と呼ぶ. ここで, 基底変数は目的関数の変数に含まれていないことに注意しよう. この形を線形計画問題の**辞書**, または**基底形式表現**と呼ぶ.

2. 実行可能基底解

ここで, 右辺に現れる変数 x_1, x_2, x_3 をすべて 0 とすると, $x = (0, 0, 0, 2, 5, 7)$ は問題 (3) の制約を満たす. この x を辞書 (3) に対する**実行可能基底解**と呼ぶ.

いま, この実行可能基底解における目的関数値は 0 になっている. これを次のようなルールで改善する;

(i). 式の非基底変数の中から, 目的関数の係数が負であるものを一つ選び, その値を 0 から t だけ増加させる. その他の非基底変数は 0 のままとする.

(ii). (i) で選んだ変数の増加幅 t を x_4, x_5, x_6 が負にならないぎりぎりまでとする

問題 (3) では目的関数 z のすべての係数が負なので, 目的関数の減少幅が一番大きくなる x_3 の値を 0 から増加させる. その他の非基底変数 x_1, x_2 に 0 を代入し, (ii) のルールにより x_3 の増加幅 t を求めると,

$$
\begin{aligned}
&x_4 = 2 - t,\ x_4 \geq 0 \ \Rightarrow\ t \leq 2 \\
&x_5 = 5 - 2t,\ x_5 \geq 0 \ \Rightarrow\ t \leq 5/2 \\
&x_6 = 7 - 2t,\ x_6 \geq 0 \ \Rightarrow\ t \leq 7/2
\end{aligned}
$$

なので, x_4, x_5, x_6 が負にならない最大の t は $t = 2$ となる. $x_3 = t$ とすると新しい実行可能解

$$x = (0, 0, t, 2 - t, 5 - 2t, 7 - 2t) = (0, 0, 2, 0, 1, 3)$$

が得られる. このとき目的関数値は $z = (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 2 = -6$ なので, 確かに目的関数値は改善されている.

3. 辞書の更新

始めの実行可能基底解 $(0, 0, 0, 2, 5, 7)$ と $(0, 0, 2, 0, 1, 3)$ を比べると, x_3 が 0 から正になった代わりに x_4 が正から 0 になっている. そこで, x_3 と x_4 の役割を入れ替える. まず, 辞書 (3) の x_4 の関係する制約式で $x_3 = 2 - x_1 - x_4$ と変形する. 次にこれを他の式に代入し, x_3 を消去する. 最後に目的関数 z から x_3 を消去する.

(辞書 2) すると, 新しい辞書

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 6 \\
\text{制約} & x_3 = 2 - x_1 \qquad\quad - \ x_4 \\
& x_5 = 1 + x_1 - x_2 + 2x_4 \\
& x_6 = 3 - x_1 - x_2 + 2x_4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
\tag{4}
$$

が得られる.

4. 反復

これに同様の操作を繰り返す. 係数が負であるのは x_2 だけなので, その他の非基底変数について $x_1, x_4 = 0$ とし, 変数 x_2 を増加させる. 増加幅はルール (ii) より, $t = 1$ になる. このとき新しい実行可能解は,

$$x = (0, t, 2, 0, 1 - t, 3 - t) = (0, 1, 2, 0, 0, 2)$$

このとき, 目的関数値は $z = 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 6 = -8$ となり目的関数値は改善されている

x_5 が新たに 0 になったので, x_2 と x_5 の役割を交換する. x_5 の関係する式より, $x_2 = 1 + x_1 + 2x_4 + x_5$ を得るので, この式を用いて他の式から x_2 を消去する.

(辞書 3**)** 新しい辞書は

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & z = -x_4 + 2x_5 - 8 \\
\text{制約} & x_2 = 1 + \ \ x_1 + 2x_4 - x_5 \\
& x_3 = 2 - \ \ x_1 - \ \ x_4 \\
& x_6 = 2 - 2x_1 \qquad\quad + x_5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
\tag{5}
$$

目的関数の係数より x_4 を増加させ $x_1, x_5 = 0$ とすると, 増加幅は $t = 2$ となる. 新しい実行可能解は $x = (0, 1 + 2t, 2 - t, t, 0, 2) = (0, 3, 0, 2, 0, 2)$ となる. このとき, 目的関数値は $z = (-1) \cdot 2 - 8 = -10$ となり解は改善されている.

(辞書 4) 新しい辞書は

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & z = x_1 + x_3 + 2x_5 - 10 \\
\text{制約} & x_2 = 5 - \ \ x_1 - x_3 - x_5 \\
& x_4 = 2 - \ \ x_1 - x_3 \\
& x_6 = 2 - 2x_1 \qquad\quad + x_5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
\tag{6}
$$

係数を見ると, すべて正になっている. したがって, 目的関数に含まれる変数 x_1, x_3 を 0 から増加させても目的関数値は改善しない.

5. 単体法の終了

よって, 問題 (6) の最適解は $x = (0, 5, 0, 2, 0, 2)$ で, 最適値は -10 となる. さて, いままでの変形を振り返ると, 始めの辞書 (3) から変数の順番を変える変形を行っただけなので, 辞書 (6) の最適解 $(0, 5, 0, 2, 0, 2)$ は元の問題 (1) の最適解となる.

練習問題 5. 単体法を用いて最適解を求めよ.

(1).

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & -x_1 - 2x_2 \\
\text{制約} & \quad x_1 + x_2 \leq 3 \\
& -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(2).

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\
\text{制約} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
 & 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 \leq 5 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$