

7.3 単体法の幾何

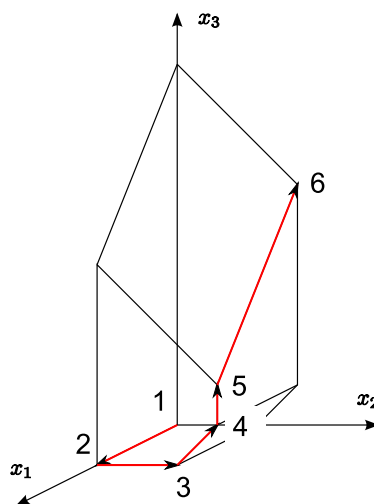
単体法で最小解を求めることができる理由を概観する. 線形の不等式 (等式を含んでも良い) で定義された (カクカクした) 集合を凸多面体という. 特に線形計画の実行可能解は凸多面体である.

定理 15. 辞書の実行可能基底解は実行可能集合 (凸多面体) の頂点になっている. また実行可能集合の頂点は, ある辞書の実行可能基底解である.

この定理を例題を通じて解説しよう. 単体法を用いて次の線形計画問題を解く.

$$\begin{aligned} \text{最小化 } z &= -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ \text{制約 } 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 9 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ここで, 実行可能領域は図のような凸多面体の面と内部になっている. 数字は対応する辞書の実行可能基底解の x_1, x_2, x_3 座標であり, 矢印は基底解を更新するときに解が動く向きである.



例えば, 辞書 1 で x_1 を増やすと, 図で 1 から 2 へ実行可能基底解が移る.

(辞書 1)

$$\begin{aligned} \text{最小化 } z &= -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ \text{制約 } x_4 &= 9 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 &= 2 - \textcircled{x_1} \\ x_6 &= 3 - x_2 \\ x_7 &= 2 - x_2 + x_3 \end{aligned}$$

実行可能基底解 $(0, 0, 0, 9, 2, 3, 2)$

(辞書 2)

$$\begin{aligned} \text{最小化 } z &= -12 - 5x_2 - 4x_3 + 6x_5 \\ \text{制約 } x_4 &= 5 - \textcircled{x_2} - x_3 + 2x_5 \\ x_1 &= 2 - x_5 \\ x_6 &= 3 - x_2 \\ x_7 &= 2 - x_2 + x_3 \end{aligned}$$

実行可能基底解 $(2, 0, 0, 5, 0, 3, 2)$

(辞書 3)

$$\begin{aligned} \text{最小化 } z &= -22 - 9x_3 + 6x_5 + 5x_7 \\ \text{制約 } x_4 &= 3 - 2x_3 + 2x_5 + x_7 \\ x_1 &= 2 - x_5 \\ x_6 &= 1 - \textcircled{x_3} + x_7 \\ x_2 &= 2 + x_3 - x_7 \end{aligned}$$

実行可能基底解 $(2, 2, 0, 3, 0, 1, 0)$

(辞書 4)

$$\begin{aligned} \text{最小化 } z &= -31 + 6x_5 + 9x_6 - 4x_7 \\ \text{制約 } x_4 &= 1 + 2x_5 + 2x_6 - \textcircled{x_7} \\ x_1 &= 2 - x_5 \\ x_3 &= 1 - x_6 + x_7 \\ x_2 &= 3 - x_6 \end{aligned}$$

実行可能基底解 $(2, 3, 1, 1, 0, 0, 0)$

<p>(辞書 5)</p> <p>最小化 $z = -35 + 4x_4 - 2x_5 + x_6$</p> <p>制約 $x_7 = 1 - x_4 + 2x_5 + 2x_6$</p> <p style="padding-left: 2em;">$x_1 = 2 \quad - \textcircled{x_5}$</p> <p style="padding-left: 2em;">$x_3 = 2 - x_4 + 2x_5 + x_6$</p> <p style="padding-left: 2em;">$x_2 = 3 \quad - x_6$</p> <p>実行可能基底解 (2, 3, 2, 0, 0, 0, 1)</p>	<p>(辞書 6)</p> <p>最小化 $z = -39 + 2x_1 + 4x_4 + x_6$</p> <p>制約 $x_7 = 5 - 2x_1 - x_4 + 2x_6$</p> <p style="padding-left: 2em;">$x_5 = 2 - x_1$</p> <p style="padding-left: 2em;">$x_3 = 6 - 2x_1 - x_4 + x_6$</p> <p style="padding-left: 2em;">$x_2 = 3 \quad - x_6$</p> <p>実行可能基底解 (0, 3, 6, 0, 2, 0, 5)</p> <p>最小解 (0, 3, 6), 最小値 -39</p>
---	---

定理 16. 線形計画問題が最小解を持てば、辞書の実行可能基底解の中に最小解が存在する。

辞書は有限個しかないので、全ての辞書を調べれば最小解があれば見つかる。なければ目的関数をいくらでも小さくするような変数が見つかる。しかしそれでは効率が悪い。単体法では目的関数を小さくする方向に向かって隣接する頂点への移動を繰り返すアルゴリズムである。しかし、辞書を作り直す際に同じ辞書が現れる場合がある。そのときは次のような規則を使えば、別の辞書を得ることができる。

最小添字ルール

- (i). 目的関数で負係数の変数 x_i を選ぶときに添字の番号が最小のものを選ぶ。
- (ii). x_i を増やすことで 0 になる基底変数が二つある場合も、それらの中で添字が最小のものを選ぶ。

7.4 二段単体法

次のような線形計画問題を考える：

$$\begin{aligned}
 &\text{最小化 } z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\
 &\text{制約 } x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
 &\quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 12 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

このままスラック変数 x_4, x_5 を加え辞書を作ると、

$$\begin{aligned}
 &\text{最小化 } z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\
 &\text{制約 } x_4 = -6 + x_1 + 2x_2 + x_3 \\
 &\quad x_5 = 12 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

となる. しかし, この辞書では 非基底変数 x_1, x_2, x_3 に 0 を代入しても, 定数項で負のものがあるので実行可能解は得られない.

このような場合に, 始めに実行可能な辞書を得てから最小解を求めるのが二段階単体法である. 一般に線形計画の標準形から実行可能な辞書を得ることができる. 実行可能な辞書を得るには, **人工変数** x_6 を加えて, 次のような問題を考える;

$$\begin{aligned} (P_a) \text{ 最小化 } & w = x_6 \\ \text{制約 } & x_6 = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\ & x_5 = 12 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

これは, 不都合な式 $x_4 = -6 + x_1 + 2x_2 + x_3$ を定数項が正になるように $0 = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$ と書いて, 右辺を x_6 と置いたものである. すると, この問題の最小値は 0 以上になる. また x_6 は初めの辞書の第一式の差を表しているので, 次のような関係がある;

定理 17. (P_a) の最小値が正ならば, 元の問題に実行可能解は存在しない.

さて, この問題に単体法を適用し最小解を求めてみよう. 始めの辞書は,

$$\begin{aligned} \text{最小化 } & w = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{制約 } & x_6 = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\ & x_5 = 12 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

になる. $x_2 \rightarrow 3$ とすると $x_6 \rightarrow 0$ なので, 掃き出しをすると,

$$\begin{aligned} \text{最小化 } & w = x_6 \\ \text{制約 } & x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ & x_5 = 6 - 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

となる. すると, $(0, 3, 0, 0, 6, 0)$ は最小解で $w = 0$ となる. いま, この辞書と (P_a) は式変形をただけなので同値である. さらに (P_a) で $x_6 = 0$ とすると, 元の問題と同値になる. よって, この辞書で $x_6 = 0$ とした制約を考えると,

$$\begin{aligned} \text{最小化 } & z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{制約 } & x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ & x_5 = 6 - 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

は元の問題と同値である。これから辞書を作ると、

$$\begin{aligned} \text{最小化 } z &= -3 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ \text{制約 } x_2 &= 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 6 - 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

は実行可能な辞書である。これに単体法を適用すれば解が求まる。

練習問題 6. 二段階単体法を用いて最適解を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{最小化 } z &= x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{制約 } -2x_1 + x_2 + x_3 &\leq -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$