

7.5 双対問題

最小化問題には、双対問題と呼ばれる裏に隠されたもう一つの問題がある。これについて、ストラング、線形代数とその応用、産業図書のをもとに解説する。

例 18 (食費を最小化). 消費者が食品 1 と食品 2 を購入する. ここで, 食品は主に 2 種類の栄養素を含んでおり, それぞれ以下のように価格と各栄養素の最低摂取量が決まっている;

	食品 1 (x_1)	食品 2 (x_2)	最低摂取量
価格	1	4	
栄養 1	2	1	6
栄養 2	5	3	7

Q1. 必要な栄養を摂りながら食費を最小にするには, どのような割合で二つの食品を購入すれば良いか.

問題を最適化問題として定式化すると, 以下の問題を解いて, 各食品の量 x_1, x_2 を決定すれば良い;

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}) \text{ 最小化 } & x_1 + 4x_2 \\
 \text{制約 } & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 5x_1 + 3x_2 \geq 7 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

一方, このような食品に対してある製薬会社が各栄養を含むビタミン剤の価格を決めようとしている. このとき, 食品との競合に勝つために,

Q2. 通常の食品より安く栄養を摂れるようにビタミン剤の価格を抑えながら, 利益を最大にするには, ビタミン剤の価格をどのように設定すれば良いだろうか.

まず, 問題 (P) より, 食品 1 に含まれる 栄養の価格 を見積もると,

『2 単位の栄養 1』 + 『5 単位の栄養 2』 = 価格 1 (目的関数の x_1 の係数),
 という式が成り立つだろう. 同様に, 食品 2 は

『1 単位の栄養 1』 + 『3 単位の栄養 2』 = 価格 4 (目的関数の x_2 の係数),
 となる. ここで栄養素 1 を含むものをビタミン剤 1 としその単位当たりの価格を y_1 ,
 栄養素 2 を含むものをビタミン剤 2 としその価格を y_2 とする. すると,

$$\begin{aligned}
 & 2y_1 + 5y_2 \leq 1 \\
 (\text{『2 単位のビタミン剤 1 の価格』} + \text{『5 単位のビタミン剤 2 の価格』} \leq 1) \\
 & y_1 + 3y_2 \leq 4 \\
 (\text{『1 単位のビタミン剤 1 の価格』} + \text{『3 単位のビタミン剤 2 価格』} \leq 4)
 \end{aligned}$$

となるようにビタミン剤の価格を設定すればよい。また、最低摂取量より、

ビタミン剤 1 は 6 単位, ビタミン剤 2 は 7 単位

購入される。したがって、食品との競合に勝ち利益を最大にするように価格を設定するためには、以下の問題を解いて価格 y_1, y_2 を決定すれば良い;

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}) \text{ 最大化 } & 6y_1 + 7y_2 \\ \text{制約 } & 2y_1 + 5y_2 \leq 1 \\ & y_1 + 3y_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

補足. ここで問題 (D) の導出法を考えると、

$$\text{『}(\mathcal{P}) \text{ の食品購入費 } (x_1 + 4x_2)\text{』} \geq$$

$$\text{『}(\mathcal{D}) \text{ のビタミン剤で栄養を摂ったときの価格 } (6y_1 + 7y_2)\text{』}$$

が成り立つことが予想される。実際に計算をすれば上記の不等式を示すことができる。さらに、

$$\text{『}(\mathcal{P}) \text{ の最小費用』} = \text{『}(\mathcal{D}) \text{ の最大利益』}$$

という等式が成り立つことも示せる。

さて、問題 (P) のような初めの問題を特に、**主問題**という。ベクトルと行列を使うと一般に、

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}) \text{ 最小化 } & {}^t c x \\ \text{制約 } & A x \geq b \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

と書ける。ここで ${}^t c$ はベクトル c の転置を表し、 $x \geq 0$ は、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) という意味である。これに対して、(D) を**双対問題**と呼ぶ。一般に上記の主問題に対して、

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}) \text{ 最大化 } & {}^t b y \\ \text{制約 } & {}^t A y \leq c \\ & y \geq 0\end{aligned}$$

と書ける。

定理 18. (P) と (D) の任意の実行可能解をそれぞれ x, y とすると、

$$\text{(弱双対定理)} \quad {}^t c x \text{ (P の目的関数値)} \geq {}^t b y \text{ (D の目的関数値)}$$

が成り立つ。また、それぞれの最適解を x_*, y_* とすると、

$$\text{(強双対定理)} \quad {}^t c x_* \text{ (P の最小値)} = {}^t b y_* \text{ (D の最大値)}$$

が成り立つ。

7.6 潜在価格

この節では双対問題の解の役割について簡単に説明する.

例 19. 工場で製品 1 と製品 2 を作っている. 各製品の価格と必要なアルミと鉄の量は以下のようになる;

	製品 1 (x_1)	製品 2 (x_2)	在庫
価格	8 万円	6 万円	
アルミ	1 kg	1 kg	4 kg
鉄	3 kg	1 kg	6 kg

Q1. 材料の在庫を考慮しながら, 各製品をいくつずつ作れば利益が最大になるか?

製品 1 の個数を x_1 , 製品 2 の個数を x_2 とすると, 問題は以下のように定式化できる;

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}) \quad & \text{最大化 } 8x_1 + 6x_2 \\ & \text{制約 } x_1 + x_2 \leq 4 \\ & \quad 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

いま, (\mathcal{P}) の解は $(x_1, x_2) = (1, 3)$, 最適値 26 となることがわかる. ここで, さらに以下のような問題を考える.

Q2. アルミか鉄のどちらかの在庫を一個だけ増やせるとしたら, どちらを増やした方が最大利益が増えるか?

この問題は, 一般に双対問題の解を利用して解くことができる. 双対問題を作ると以下のようなになる. ((\mathcal{P}) の目的関数と制約式を (-1) 倍して前節の問題と同じ形にし, 行列の転置, 係数ベクトルなどを同様にあてはめればよい)

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}) \quad & \text{最小化 } 4y_1 + 6y_2 \\ & \text{制約 } y_1 + 3y_2 \leq 8 \\ & \quad y_1 + y_2 \leq 6 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

いま, (\mathcal{D}) の解は $(y_1, y_2) = (5, 1)$ となる (最適値は強双対定理より 26).

ここで, 双対問題 (D) の解は次のような役割をもつ. (P) の一つ目の制約式の右辺を 1 増やした問題

$$\begin{aligned}(\mathcal{P})_1 \text{ 最大化 } & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{制約 } & x_1 + x_2 \leq 4 + \mathbf{1} \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

の最適値は元の問題 (P) の最適値と比べて, $y_1 = 5$ だけ増える. 一方, (P) の二つ目の制約式の右辺を 1 だけ増すと最適値は $y_2 = 1$ だけ増える. これより, アルミの在庫を 1 増やした方が最大利益の増加が大きいことがわかる.

ここで, 双対問題の解 y_1 はアルミの**潜在価格**と呼ばれる. 同様に y_2 は鉄の潜在価値と呼ばれる.