

最適化数学 第 4 回練習問題 (担当: 関口 良行)

所属: _____ 学籍番号: _____ 氏名: _____

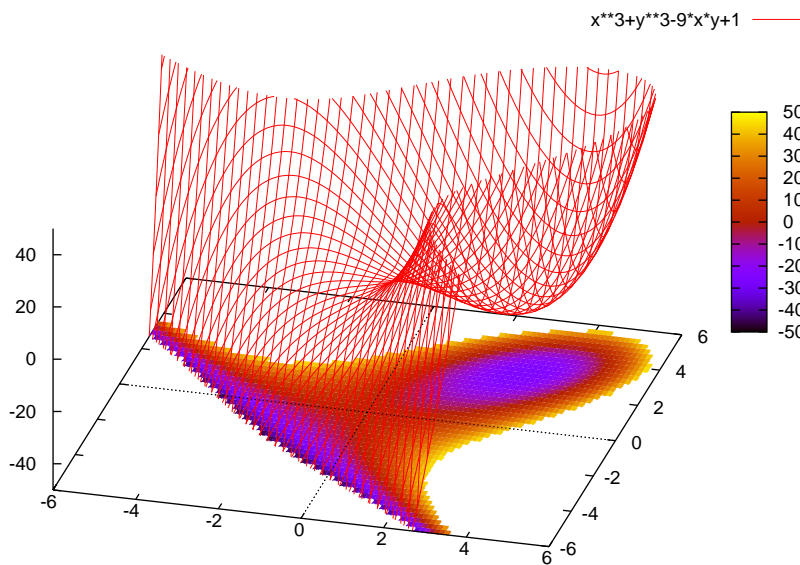
注意: 答え合わせの際は色ペンを使うこと.

次の関数の局所最適値 (極値) を求めよ.

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$

(解答例) $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x) = 0$ を解くと, 停留点は $(0, 0), (3, 3)$ となる. また, ヘッセ行列は $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix}$ となる. 停留点での正値性を調べると, $|\nabla^2 f(0, 0)| < 0$ なので不定. $|\nabla^2 f(3, 3)| > 0$ かつ $f_{xx}(3, 3) > 0$ なので, ヘッセ行列は正定値になり, $(0, 0)$ は極小 (局所最小解) になる. 従って, $f(3, 3) = -26$ は極小値 (局所最小値) である.

(x, y)	$(0, 0)$	$(3, 3)$
$\nabla^2 f(x, y)$	-	+
$f_{xx}(x, y)$		+
	不定	小
$f(x, y)$		-26



裏へ続く

2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x - 6y$

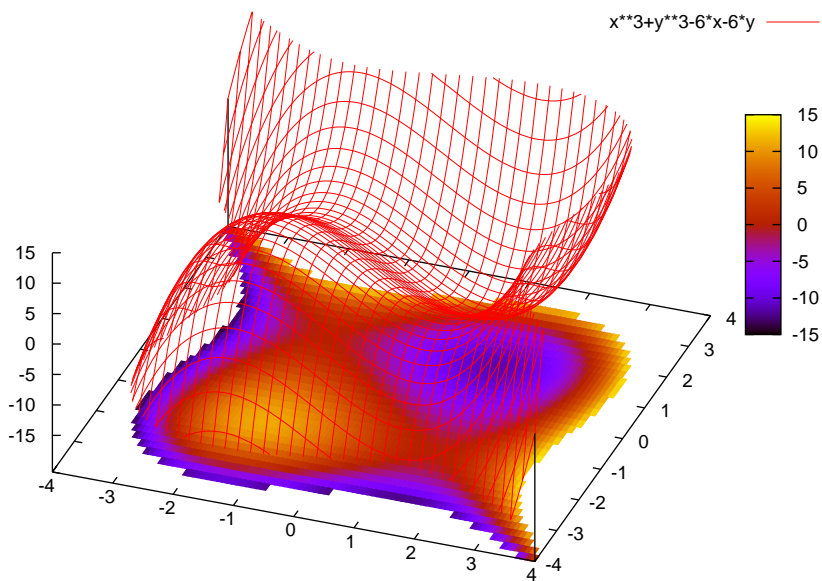
(解答例) $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 6, 3y^2 - 6) = (0, 0)$ を解くと, 停留点は $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ (順不同) となる. ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{bmatrix}$ の停留点での正值性を調べる.

$|\nabla^2 f(\sqrt{2}, \sqrt{2})| > 0$ かつ $f_{xx}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ なので, ヘッセ行列は正定値になり, $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2}$ は極小値である.

$|\nabla^2 f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})| > 0$ かつ $f_{xx}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) < 0$ なので, ヘッセ行列は負定値になり, $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ は極大値である.

$|\nabla^2 f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})| < 0$ なので不定である.

(x, y)	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$
$\nabla^2 f(x, y)$	+	+	-
$f_{xx}(x, y)$	+	-	
	小	大	不定
$f(x, y)$	$-8\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	



裏へ続く

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz - zx + x + y - 2z + 1$

(解答例) $\nabla f(x, y, z) = (2x + y - z + 1, 2y + x - z + 1, 2z - y - x - 2) = (0, 0, 0)$ を解くと停留点は $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ となる. ヘッセ行列

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

の正値性を調べる. この行列の固有値を求めると, 1, 4 となり, すべての固有値が正なので, ヘッセ行列は正定値になる. よって, $(0, 0, 1)$ は極小点である. さらにヘッセ行列がすべての点で正定値になるので, f は凸関数になり, $f(0, 0, 1) = 0$ は大域最小値になる.

4. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x$

(解答例) $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 3 \\ 6xy - 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解く. 第 2 式より, $y(2x - y) = 0$ を得る.
以下場合分けをして解く.

$y = 0$ の時, 第 2 式は成り立つので, 第 1 式より, $x^2 - 1 = 0$ を得る. よって, $x = \pm 1$ となるので, 停留点は $(\pm 1, 0)$.

$y \neq 0$ の時, 第 2 式が成り立つためには $2x - y = 0$ が必要である. よって, 第 1 式で y を消去すると $5x^2 - 1 = 0$ となり, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ を得る. よって, 停留点は $(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{2}{\sqrt{5}})$ となる.

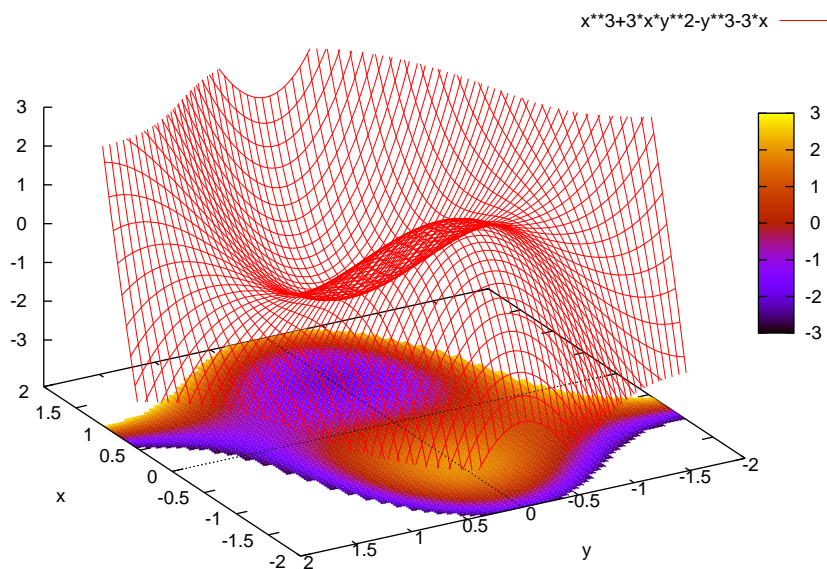
次にヘッセ行列 $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x - 6y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x & y \\ y & x - y \end{bmatrix}$ の正值性を調べる.

$|\nabla^2 f(1, 0)| > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ なので, $f(1, 0) = -2$ は極小値である.

$|\nabla^2 f(-1, 0)| > 0$ かつ $f_{xx} < 0$ なので, $f(-1, 0) = 2$ は極大値である.

$|\nabla^2 f(\pm 1/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})| < 0$ なので不定である.

(x, y)	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(\pm 1/\sqrt{5}, \mp 2/\sqrt{5})$
$\nabla^2 f(x, y)$	+	+	-
$f_{xx}(x, y)$	+	-	
	小	大	不定
$f(x, y)$	-2	2	



5. $f(x, y) = 2x^4 - 2x^2 + y^2 + 2x^2y$

(解答例) $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 8x^3 - 4x + 4xy \\ 2y + 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解く.

第 2 式より, $y = -x^2$ を得る. 第 1 式より, $x(2x^2 - 1 + y) = 0$ を得るので, 以下場合分けをする.

$x = 0$ のとき, $y = 0$ である.

$x \neq 0$ のとき, $2x^2 - 1 + y = 0$ なので, 2 つの式から y を消去すると $x = \pm 1$ を得る. よって, 停留点は $(0, 0), (\pm 1, -1)$ である.

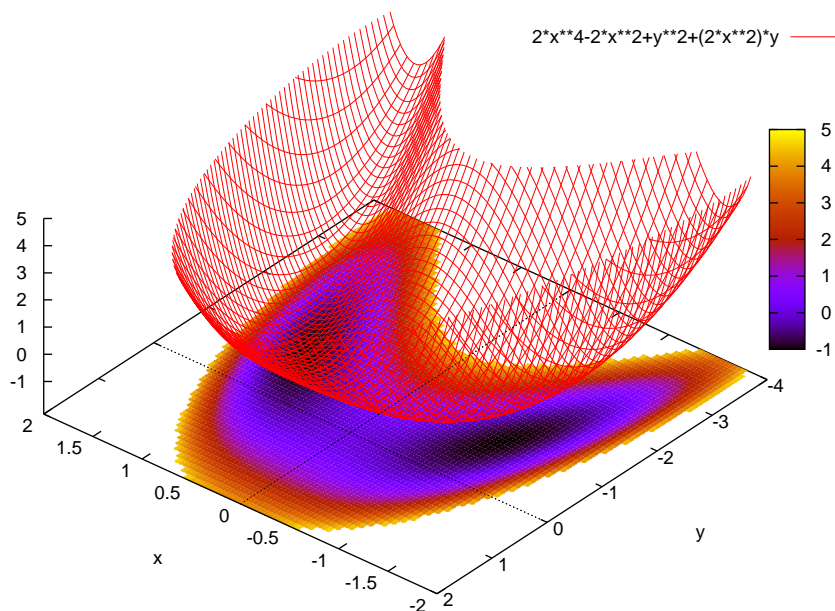
ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 4 + 4y & 4x \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$ の正値性を調べる.

$|\nabla^2 f(1, -1)| < 0$ なので $(0, 0)$ は不定.

$|\nabla^2 f(1, -1)| > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ なので, $f(1, -1) = -1$ は極小値である.

$|\nabla^2 f(-1, -1)| > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ なので, $f(-1, -1) = -1$ も極小値である.

(x, y)	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, -1)$
$\nabla^2 f(x, y)$	-	+	+
$f_{xx}(x, y)$		+	+
	不定	小	小
$f(x, y)$	-1	-1	



感想・要望など