5 線形計画問題

5.1 単体法

最適化問題

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\ & f(x) \\
\text{制約}\ & g(x) \leq 0
\end{aligned}
$$

において, 目的関数も制約式も一次式であるものを線形計画問題と呼ぶ．例として次の問題を挙げる．

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\text{最小化} & -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \\
\text{制約} & x_1 & & & + & x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq 7 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
\tag{5.1}
$$

初めに挙げた最適化問題において,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
g_1(x) &= x_1 + x_3 - 2 \\
g_2(x) &= \cdots
\end{aligned}
$$

などとおく．問題 (5.1) はスラック変数と呼ばれる x_4, x_5, x_6 を導入して次の同値な問題に変形できる．

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrl}
\text{最小化} & -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & & & & & & \\
\text{制約} & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & & & + & x_6 & = 7 \\
 & \multicolumn{12}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
\tag{5.2}
$$

問題 (5.1) は行列を使うと

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & c^T x \\ \text{制約} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

のように書ける．不等号の向きも含めこのような形の問題を線形計画問題の不等式標準形と呼ぶ．同様に，問題 (5.2) は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & c^T x \\ \text{制約} \quad & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

と書ける（A, b, x は適当に取り直す）．このような形の問題を線形計画問題の 標準形 と呼ぶ．

すべての線形計画問題は標準形に直すことができる．不等式は上記のようにスラック変数を用いて等式に直せる．また，$x \ge 0$ という制約がない場合は $x = x^+ - x^-$，$x^+ \ge 0$，$x^- \ge 0$ と分解して x を x^+ と x^- で置き換えることができる．

5.1.1 単体法の概要

線形計画問題は 単体法 と呼ばれるアルゴリズムで解くことができる．アルゴリズムの意味を説明する前に，まず単体法を用いて線形計画問題を解いてみよう．前節の問題 (5.1) を例に単体法の概要を説明する．

1. スラック変数の導入

スラック変数を導入しして標準形 (5.2) にしたあと，スラック変数 x_4, x_5, x_6 を左辺に残し，残りを右辺へ移項する．

$$\begin{aligned} \text{（辞書 1 ）最小化} \quad & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{制約} \quad & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ & x_5 = 5 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 7 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

左辺に現れる変数 x_4，x_5，x_6 を 基底変数，右辺に現れる変数 x_1，x_2，x_3 を 非基底変数 と呼ぶ．ここで，基底変数は目的関数の変数に含まれていないことに注意しよう．この形を線形計画問題の 辞書 と呼ぶ[20]．

[20] 基底形式表現とも呼ぶ

2. 実行可能基底解

ここで，右辺に現れる変数 x_1, x_2, x_3 をすべて 0 とすると，$x =$

$(0,0,0,2,5,7)$ は問題 (5.3) の制約を満たす．この x を辞書 (5.3) に対する実行可能基底解と呼ぶ．

いま，この実行可能基底解における目的関数値は 0 になっている．これを次のようなルールで減少させる；

(i). 式の非基底変数の中から，目的関数の係数が負であるものを一つ選び, その値を t， その他の非基底変数の値を 0 とおく．

(ii). (i) で選んだ変数の値 t を x_4, x_5, x_6 が負にならないぎりぎりまで増やす（t は正の数）．

問題 (5.3) では目的関数 z のすべての係数が負なので，変数の値を増やしたときに目的関数の減少幅が一番大きくなるよう $x_3 = t$, その他の非基底変数 $x_1 = x_2 = 0$ とすると

$$x = (0, 0, t, 2-t, 5-2t, 7-2t)$$

となる．次に (ii) のルールを満たす t を求めると,

$$x_4 = 2-t,\ x_4 \geq 0 \ \Rightarrow\ t \leq 2$$
$$x_5 = 5-2t,\ x_5 \geq 0 \ \Rightarrow\ t \leq 5/2$$
$$x_6 = 7-2t,\ x_6 \geq 0 \ \Rightarrow\ t \leq 7/2$$

なので，x_4，x_5，x_6 が負にならない最大の t は $t = 2$ となる．すると，代入後の x は

$$x = (0, 0, 2, 0, 1, 3)$$

となり新しい実行可能解が得られる．このとき目的関数値は $z = (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 0 + (-3)\cdot 2 = -6$ となり，確かに目的関数値は減少している．

3. 辞書の更新

始めの実行可能基底解 $(0,0,0,2,5,7)$ と $(0,0,2,0,1,3)$ を比べると, x_3 が 0 から正になった代わりに x_4 が正から 0 になっている．そこで，x_3 と x_4 の役割を入れ替える[21)]．まず，辞書 (5.3) の x_4 の関係する制約式を $x_3 = 2 - x_1 - x_4$ と変形する．次にこれを他の式に代入し，x_3 を消去する．最後に目的関数 z から x_3 を消去する．

すると，新しい辞書

$$\begin{array}{rl} \text{（辞書 2 ）最小化} & z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 6 \\ \text{制約} & x_3 = 2 - x_1 \qquad\ \ - x_4 \\ & x_5 = 1 + x_1 - x_2 + 2x_4 \\ & x_6 = 3 - x_1 - x_2 + 2x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array} \tag{5.4}$$

21) 以下の丸で囲んだ箇所を ピボット と呼び，そこに注目して変形する；

（辞書 1 ）

$$\begin{array}{rl} \text{最小化} & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{制約} & x_4 = 2 - \ x_1 \qquad\quad - x_3 \\ & x_5 = 5 - \ x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 7 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

が得られる．

4. 反復

これに同様の操作を繰り返す．係数が負であるのは x_2 だけなので，その他の非基底変数について $x_1, x_4 = 0$ とし，変数 x_2 を増加させる．増加幅はルール (ii) より，$t = 1$ になる．このとき新しい実行可能解は，

$$x = (0, t, 2, 0, 1 - t, 3 - t) = (0, 1, 2, 0, 0, 2)$$

このとき，目的関数値は $z = 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 6 = -8$ となり目的関数値は減少している．

x_5 が新たに 0 になったので，x_2 と x_5 の役割を交換する．x_5 の関係する式より，$x_2 = 1 + x_1 + 2x_4 + x_5$ を得るので，この式を用いて他の式から x_2 を消去する．

新しい辞書は

$$\begin{array}{rl}
\text{（辞書 3 ）最小化} & z = -x_4 + 2x_5 - 8 \\
\text{制約} & x_2 = 1 + x_1 + 2x_4 - x_5 \\
 & x_3 = 2 - x_1 - x_4 \\
 & x_6 = 2 - 2x_1 + x_5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array} \tag{5.5}$$

目的関数の係数より $x_1, x_5 = 0$ として x_4 を増加させると，増加幅は $t = 2$ となる．新しい実行可能解は $x = (0, 1 + 2t, 2 - t, t, 0, 2) = (0, 3, 0, 2, 0, 2)$ となる．このとき，目的関数値は $z = (-1) \cdot 2 - 8 = -10$ となり減少している．

新しい辞書は

$$\begin{array}{rl}
\text{（辞書 4 ）最小化} & z = x_1 + x_3 + 2x_5 - 10 \\
\text{制約} & x_2 = 5 - x_1 - x_3 - x_5 \\
 & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\
 & x_6 = 2 - 2x_1 + x_5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array} \tag{5.6}$$

係数を見ると，すべて正になっている．したがって，目的関数に含まれる変数 x_1, x_3 を 0 から増加させても目的関数値は改善しない．

5. 単体法の終了

よって，問題 (5.6) の最適解は $x = (0, 5, 0, 2, 0, 2)$ で，最適値は -10 となる．さて，いままでの変形を振り返ると，始めの辞書 (5.3) から変数の順番を変える変形を行っただけなので，辞書 (5.6) の最適解 $(0, 5, 0, 2, 0, 2)$ は元の問題 (5.1) の最適解となる．

問題 5.1. 単体法を用いて最適解を求めよ.

(1).

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -x_1 - 2x_2 \\
\text{制約} & x_1 + x_2 \leq 3 \\
& -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(2).

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\
\text{制約} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
& 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

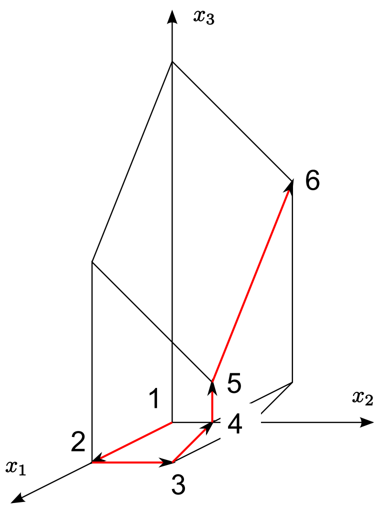
5.1.2 単体法の幾何

単体法で最小解を求めることができる理由を概観する．線形の不等式（等式を含んでも良い）で定義された（カクカクした）集合を凸多面体という．特に線形計画の実行可能解は凸多面体である．

定理 5.1. 辞書の実行可能解基底解は実行可能集合（凸多面体）の頂点になっている．また実行可能集合の頂点は，ある辞書の実行可能基底解である．

この定理を例題を通じて解説しよう．単体法を用いて次の線形計画問題を解く．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ \text{制約} & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_2 - x_3 \le 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$



ここで，実行可能領域は図のような凸多面体の面と内部になっている．数字は対応する辞書の実行可能基底解の x_1，x_2，x_3 座標であり，矢印は基底解を更新するときに解が動く向きである．

例えば，辞書 1 で x_1 を増やすと，図で **1** から **2** へ実行可能基底解が移る．

（辞書 1 ）

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ \text{制約} & x_4 = 9 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_5 = 2 - x_1 \\ & x_6 = 3 - x_2 \\ & x_7 = 2 - x_2 + x_3 \end{array}$$

実行可能基底解 $(0, 0, 0, 9, 2, 3, 2)$

（辞書 2 ）

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = -12 - 5x_2 - 4x_3 + 6x_5 \\ \text{制約} & x_4 = 5 - x_2 - x_3 + 2x_5 \\ & x_1 = 2 - x_5 \\ & x_6 = 3 - x_2 \\ & x_7 = 2 - x_2 + x_3 \end{array}$$

実行可能基底解 $(2, 0, 0, 5, 0, 3, 2)$

（辞書 3 ）

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = -22 - 9x_3 + 6x_5 + 5x_7 \\ \text{制約} & x_4 = 3 - 2x_3 + 2x_5 + x_7 \\ & x_1 = 2 - x_5 \\ & x_6 = 1 - x_3 + x_7 \\ & x_2 = 2 + x_3 - x_7 \end{array}$$

実行可能基底解 $(2, 2, 0, 3, 0, 1, 0)$

(辞書 4)

最小化 $z = -31 + 6x_5 + 9x_6 - 4x_7$

$$
\begin{aligned}
\text{制約}\quad x_4 &= 1 + 2x_5 + 2x_6 - x_7 \\
x_1 &= 2 - x_5 \\
x_3 &= 1 - x_6 + x_7 \\
x_2 &= 3 - x_6
\end{aligned}
$$

実行可能基底解 $(2,3,1,1,0,0,0)$

(辞書 5)

最小化 $z = -35 + 4x_4 - 2x_5 + x_6$

$$
\begin{aligned}
\text{制約}\quad x_7 &= 1 - x_4 + 2x_5 + 2x_6 \\
x_1 &= 2 - x_5 \\
x_3 &= 2 - x_4 + 2x_5 + x_6 \\
x_2 &= 3 - x_6
\end{aligned}
$$

実行可能基底解 $(2,3,2,0,0,0,1)$

(辞書 6)

最小化 $z = -39 + 2x_1 + 4x_4 + x_6$

$$
\begin{aligned}
\text{制約}\quad x_7 &= 5 - 2x_1 - x_4 + 2x_6 \\
x_5 &= 2 - x_1 \\
x_3 &= 6 - 2x_1 - x_4 + x_6 \\
x_2 &= 3 - x_6
\end{aligned}
$$

実行可能基底解 $(0,3,6,0,2,0,5)$

最小解 $(0,3,6)$，最小値 -39

定理 5.2. 線形計画問題が最小解を持てば，辞書の実行可能基底解の中に最小解が存在する．

辞書は有限個しかないので，全ての辞書を調べれば最小解があれば見つかる．なければ目的関数をいくらでも小さくするような変数が見つかる．しかしそれでは効率が悪い．単体法では目的関数を小さくする方向に向かって隣接する頂点への移動を繰り返すアルゴリズムである．しかし，辞書を作り直す際に同じ辞書が現れる場合がある．そのときは次のような規則を使えば，別の辞書を得ることができる．

最小添字ルール

(i). 目的関数で負係数の変数 x_i を選ぶときに添字の番号が最小のものを選ぶ．

(ii). x_i を増やすことで 0 になる基底変数が二つある場合も，それらの中で添字が最小のものを選ぶ．

5.1.3 二段単体法

次のような線形計画問題を考える:

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\quad & z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{制約}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

このままスラック変数 x_4, x_5 を加え辞書を作ると，

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{制約} \quad & x_4 = -6 + x_1 + 2x_2 + x_3 \\
& x_5 = 12 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．しかし，この辞書では 非基底変数 x_1, x_2, x_3 に 0 を代入しても，定数項で負のものがあるので実行可能解は得られない．

このような場合に，始めに実行可能な辞書を得てから最小解を求めるのが二段階単体法である．一般に線形計画の標準形から実行可能な辞書を得ることができる．実行可能な辞書を得るには，人工変数 x_6 を加えて，次のような問題を考える;

$$
\begin{aligned}
(P_a)\ \text{最小化} \quad & w = x_6 \\
\text{制約} \quad & x_6 = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\
& x_5 = 12 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

これは，不都合な式 $x_4 = -6 + x_1 + 2x_2 + x_3$ を定数項が正になるように $0 = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$ と書いて，右辺を x_6 と置いたものである．すると，この問題の最小値は 0 以上になる．また x_6 は初めの辞書の第一式の差を表しているので，次のような関係がある;

定理 5.3. (P_a) の最小値が正ならば，元の問題に実行可能解は存在しない．

さて，この問題に単体法を適用し最小解を求めてみよう．始めの辞書は，

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & w = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\
\text{制約} \quad & x_6 = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\
& x_5 = 12 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

になる．$x_2 \to 3$ とすると $x_6 \to 0$ なので，掃き出しをすると，

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & w = x_6 \\
\text{制約} \quad & x_2 = 3 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\
& x_5 = 6 - 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．すると，$(0,3,0,0,6,0)$ は最小解で $w=0$ となる．いま，この辞書と (P_a) は式変形をしただけなので同値である．さらに (P_a) で $x_6=0$ とすると，元の問題と同値になる．よって，この辞書で $x_6=0$ とした制約を考えると，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{制約} & x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
& x_5 = 6 - 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

は元の問題と同値である．これから辞書を作ると，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = -3 + \dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{5}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \\
\text{制約} & x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
& x_5 = 6 - 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

は実行可能な辞書である．これに単体法を適用すれば解が求まる．

問題 5.2. 二段階単体法を用いて最適解を求めよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = x_1 - x_2 - 2x_3 \\
\text{制約} & -2x_1 + x_2 + x_3 \leq -2 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 7 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$