6 変分問題

6.1 変分問題

今回から,「関数を変数に持つ関数」を最小化する問題を扱う.

まず「関数を変数に持つ関数」の例を挙げよう. 関数 $y(x)$ が与えられたとする. そのとき, 関数のグラフが表す曲線の $x=0$ から $x=1$ までの部分の長さは,

$$F(y)=\int_0^1 \sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

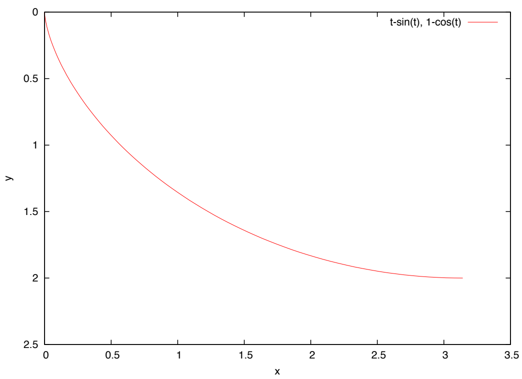
で表すことができる. 関数 y が与えられると, そのグラフの長さが一つ決まるので, これは「関数を変数に持つ関数」になっている. このような関数を汎関数と呼び, 汎関数を最小化する関数を探す問題を変分問題と呼ぶ.

例 **6.1** (最速降下線)**.** いま, xy 平面で y 軸を下向きに取る. 質点が $(a,0)$ から (b,B) まで, y 軸方向に重力のみを受けて移動するとき, 最も早く (b,B) に到着するにはどのような経路を通るか.

重力による加速度を g とおくと, 高さ y のときの速度 v は, エネルギー保存則より $mv^2/2=mgy$ を満たすので $v=\sqrt{2gy}$ となる. よって, 移動時間は

$$F(y)=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$$

となる. この汎関数を最小にする関数のグラフが最速経路を表す.



例 6.2 (人員計画問題)**.** ある仕事の量を扱うのに必要な人員数を維持しながら, 人件費をなるべく少なくできる人員計画を立てたい.

時期 x における仕事量を $s(x)$, 人員数 を $y(x)$ とし, 人件費を $F(y) = \int_0^1 \left\{y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2\right\} dx$ とする. ここで人件費は給与を $y(x)$ の 1 次式, 雇用と解雇に係る費用を $y'(x)$ の 2 次式とする (適当に変数を正規化してあるとする).

すると, 最適な人員計画は,

$$最小化\ F(y) = \int_0^1 \left\{y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2\right\} dx \qquad 制約\ y(x) \geq s(x), x \in [0,1]$$

の解を求めることによって得られる.

変分問題でも一般型は

$$最小化\ F(y)\ 制約\ y \in C$$

のように書けるので, 最適化問題の一種である.

6.1.1 汎関数

さて, 変分問題を解くために汎関数に慣れよう. より単純な汎関数に具体的な関数を代入して, 値を計算してみる. 例えば

$$F(y) = \int_0^1 y(x)^2 dx$$

を考える. 関数が

$y = x^2$ のときは $F(y) = \int_0^1 x^4 dx = 1/5$
$y = e^x$ のときは $F(y) = \int_0^1 e^{2x} x dx = (1/2)e^2 - 1/2$

という値になる[23].

[23] 値を比べると,
$$F(e^x) > F(x^2)$$
となる. それでは, $F(y)$ の値を一番小さくするのはどのような関数か? という問題を考えるのが変分問題である.

一般的に関数 f (この講義では $f(x, y, z)$ などと書く) に対して,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

と定義される汎関数を扱う. この f を被積分関数と呼ぶ (被積分関数とは単に" 積分される関数" と言う意味だが講義ではこの f を指す言葉として使う).

ここで, $y(\cdot)$ は実数上の関数であるが, 連続関数の集合 $C[a,b]$, または C^1 級関数の集合 $C^1[a,b]$ から選んでくる.

さて, 上の例では, $f(x, y, z) = y^2$ となる. このとき実際 $\int_0^1 f(x, y(x), y'(x))dx = \int_0^1 y(x)^2 dx$ となっている. 一方, 前節の人員計画問題の目的関数は, $f(x, y, z) = y + (1/2)z^2$ とすれば良い. 実際, $\int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx = \int_a^b \{y(x) + (1/2)y'(x)^2\}dx$ となる.

補足. 被積分関数を用いて汎関数を定義するとき, 表記が煩雑になるので,

$$f(x, y(x), y'(x)) = f[y(x)]$$

と略記する *(右辺で "[ ]" を使っていることに注意)*. 右辺には y' が書いていないが, x, y が決まれば $y'(x)$ も決まるので, このように略記をしても差し支えない. この略記を使うと

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx = \int_a^b f[y(x)]dx$$

とすっきり書ける.

問題 6.1. 次の汎関数の値を 与えられた関数に対して計算せよ.

$$F(y) = \int_0^l \left\{xy(x) + y'(x)^2\right\} dx$$

(i). $y(x) = 5x^2$
(ii). $y(x) = \sin(\pi x)$

6.1.2 ガトー微分

数ベクトルの場合と同様に, 変分問題でも汎関数の微分を考えることが最適解を見つける鍵となる.

定理 6.1. 関数 $y(\cdot), v(\cdot)$ に対して,

$$DF(y)(v) := \left.\frac{d}{d\epsilon}F(y + \epsilon v)\right|_{\epsilon=0}$$

を F の y における v に対するガトー微分と呼ぶ. ただし, ガトー微分が定義されるのは右辺の極限が存在する場合のみである.

例 6.3. $F(y) = \int_0^1 y(x)^2 dx$ のとき.

$$\frac{d}{d\epsilon}F(y + \epsilon v) = \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon}\left\{(y(x) + \epsilon v(x))^2\right\} dx = \int_0^1 \{2(y(x) + \epsilon v(x))v(x)\} dx$$

よって, $\epsilon = 0$ を代入すると,

$$DF(y)(v) = 2\int_0^1 y(x)v(x)dx$$

となる.

上記のように定義から計算することも可能だが, 以下の公式がある.

命題 6.1. 汎関数 F が, $f(x, y, z)$ を用いて

$$F(y) = \int_a^b f[y(x)]dx = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

で与えられるとき, f が充分滑らかならば,

$$\begin{aligned} DF(y)(v) &= \int_a^b \{f_y(x, y(x), y'(x))v(x) + f_z(x, y(x), y'(x))v'(x)\}\, dx \\ &= \int_a^b \{f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)\}\, dx \end{aligned}$$

と書ける. ここで, f_y は第 2 変数, f_z は第 3 変数に関する偏微分を表す.

証明. いま, $[a, b]$ が有界閉区間, f が充分滑らかなので,

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}\int_0^1 f[y(x) + \epsilon v(x)]dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \epsilon} f[y(x) + \epsilon v(x)]dx$$

となる. ここで, $\frac{\partial}{\partial \epsilon} f[y(x) + \epsilon v(x)] = \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(x, y(x) + \epsilon v(x), y'(x) + \epsilon v'(x))$ を計算する. いま, $y(x), y'(x), v(x), v'(x)$ は数であることに注意すると, 多変数の合成関数微分公式より,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \epsilon} f(x, y(x) + \epsilon v(x), y'(x) + \epsilon v'(x)) \\ &= f_y(x, y(x)+\epsilon v(x), y'(x)+\epsilon v(x))v(x)+f_z(x, y(x)+\epsilon v(x), y'(x)+\epsilon v'(x))v'(x) \\ &\qquad = f_y[y(x) + \epsilon v(x)]v(x) + f_z[y(x) + \epsilon v(x)]v'(x) \end{aligned}$$

となる. よって $\epsilon = 0$ を代入すれば, ガトー微分の公式を得る. □

補足. 同様に, 汎関数 F が, $f(x, y)$ を用いて

$$F(y) = \int_a^b f[y(x)]dx = \int_a^b f(x, y(x))dx$$

で与えられるときは,

$$DF(y)(v) = \int_a^b f_y[y(x)]v(x)dx = \int_a^b f_y(x, y(x))v(x)dx$$

と書ける.

例 **6.4.** *(i).* $F(y) = \int_0^1 \{y(x) + y'(x)^2\}dx$ のとき.

$f(x, y, z) = y + z^2$ とおくと, $F(y) = \int_0^1 f(x, y(x), y'(x))dx$ と書けるので, これが被積分関数になる. ここで, $f_y = 1$, $f_z = 2z$ なので, ガトー微分は

$$DF(y)(v) = \int_0^1 \{f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)\}\, dx = \int_0^1 \{v(x) + 2y'(x)v'(x)\}\, dx$$

となる.

(ii). $F(y) = \int_0^1 y(x)^2 dx$ のとき.

被積分関数は $f(x,y,z) = y^2$ となる. ここで, $f_y = 2y$, $f_z = 0$ なので,

$$DF(y)(v) = \int_0^1 2y(x)v(x)dx$$

となる.

問題 6.2. 汎関数 $F(y) = \int_0^1 \left\{xy(x) + y'(x)^3\right\} dx$, $J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ について以下の問いに答えよ.

(i). F の被積分関数 $f(x,y,z)$ を書け.
(ii). J の被積分関数 $f(x,y,z)$ を書け.
(iii). F のガトー微分を求めよ.
(iv). J のガトー微分を求めよ.

6.1.3 凸汎関数

数ベクトルの最小化問題を考えるときに凸関数が重要な役割を果たした. 凸関数は次の性質を持つ;

$$\begin{aligned} f \text{ が凸関数である } &\Leftrightarrow \text{ 任意の } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ ついて } f(v) \geq f(u) + \nabla f(u)(v - u) \\ &\Leftrightarrow \text{ 任意の } u \text{ についてヘッセ行列 } \nabla^2 f(u) \text{ が半正定値} \end{aligned}$$

以下では, 汎関数についても凸性を考える.

定義 6.1. 汎関数 F が, 任意の関数 $y, \tilde{y}$ に対して

$$F(\tilde{y}) \geq F(y) + DF(y)(\tilde{y} - y)$$

を満たす時, 汎関数 F を凸汎関数と呼ぶ. ここで, $DF(y)$ は F の y におけるガトー微分を表す. *($F(y+v) \geq F(y) + DF(y)(v)$) とも書ける).*

上の不等式が集合 C 内の関数 $y, \tilde{y}$ に対してのみ成り立つ場合は, F は C 上で凸であるという.

命題 6.2. 汎関数 F を

$$F(y) = \int_a^b f[y(x)]dx = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

とする. 任意の $x \in [a,b]$ に対して, 被積分関数 $f(x,y,z)$ が第 2, 第 3 変数に関して凸ならば、汎関数 F も凸になる.

補足. 「被積分関数 $f(x,y,z)$ が第 2, 第 3 変数に関して凸」とは, 偏微分のように, x を定数とみなして (y,z) の関数 $f(x,\cdot,\cdot)$ が凸, と言う意味である.

証明. $f(x,y,z)$ は第 2, 第 3 変数で凸なので, 任意の $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f(x, y+v_1, z+v_2) \geq f(x,y,z) + \langle (f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)), (v_1, v_2) \rangle$$

が成り立つ．この式に $y = y(x), z = y'(x)$, $v_1 = v(x), v_2 = v'(x)$ とすると，

$$\begin{aligned} & f(x, y(x)+v(x), y'(x)+y'(x)) \\ & \geq f(x, y(x), y'(x)) + \langle (f_y(x, y(x), y'(x)), f_z(x, y(x), y'(x))), (v(x), v'(x)) \rangle \end{aligned}$$

を得る．$f[y(x)] = f(x, y(x), y'(x)), f_y[y(x)] = f_y(x, y(x), y'(x))$ などという略記を使うと，これは

$$f[y(x)+v(x)] \geq f[y(x)] + f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)$$

となる．両辺を積分すると，

$$\int_a^b f[y(x)+v(x)]dx \geq \int_a^b f[y(x)]dx + \int_a^b \{f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)\}\,dx$$

を得て，これはガトー微分の公式より $F(y+v) \geq F(y) + DF(y)(v)$ を表す．よって汎関数 F は凸になる． □

例 6.5. 凸汎関数の例

(i). $F(y) = \int_a^b \left\{x + y(x)^2 + y'(x)^2\right\}dx$
被積分関数 $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$ は凸関数なので F は凸汎関数である．

(ii). $F(y) = \int_a^b \left\{-x^2 + y(x)^2 + y'(x)^2\right\}dx$
被積分関数 $f(x,y,z) = -x^2 + y^2 + z^2$ は x に関しては凸ではないが，x を定数とみなすと，第 2, 第 3 変数に関しては凸である．したがって，F は凸汎関数である．

問題 6.3. 次の汎関数が凸かどうか調べよ

(i). $F(y) = \int_0^1 \{e^x y(x) + y'(x)^2\}dx$
(ii). $J(y) = \int_0^1 \{-x^2 + y(x)^2 + \sqrt{1+y'(x)^2}\}dx$