

最適化数学 自習問題 (2013, 担当: 関口 良行)

1. 自習用の問題です. テスト勉強に役立ててください
2. 答えは非公開です. 自力, または友人と相談して考えてください.
3. 質問は受け付けますが, 直接答えは聞かないでください.
4. 試験は手書きの A4 一枚のみ持ち込み可能です (コピーは不可).

1. 極値を求めよ.

- (1) $f(x, y) = x^3 + 5x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 3x - 3y + 1$
- (2) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 4y^3 - 3x + 1$
- (3) $f(x, y, z) = x^3 + z^3 - 3x^2 + y^2 - 3xz + 3x - 4y + 3z - 1$

2. 最適化問題の局所最適解を求めよ. また大域最適解が求まるときは求めよ.

- (1) 最小化 $f(x, y) = x - y$
制約 $g(x, y) = 2x^2 + 3y^2 = 1$
- (2) 最小化 $3x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz$
制約 $x + y + z = 1$
- (3) 最小化 $f(x, y, z) = x + y + z$
制約 $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$
 $g_2(x, y, z) = x - y + z = 0$

3. 最適化問題の KKT 条件を求めよ

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } 3x^2 - 8xy + 3y^2 \\ & \text{制約 } x + 2y \leq 8, 3x + y \leq 9 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

4. 原点を中心とする半径 2 の球と平面 $x + 3y - \sqrt{3}z = 3\sqrt{3}$ の交点の中で, x 座標が最大となるものを求めよ.

5. 変分問題の停留関数を求めよ.

- (1) 最小化 $J(y) := \int_0^1 \{(y'(x) - x)^2 + 2xy(x)\} dx$
制約 $y(0) = 0, y(1) = 5/3$
- (2) 最小化 $J(y) := \int_0^{\pi/6} \left\{ \frac{y'(x)^3}{\cos^2 x} \right\} dx$
制約 $y(0) = 1, y(\pi/6) = 3/2$
- (3) 最小化 $J(y) := \int_0^\pi \{2y(x) \sin x + y'(x)^2\} dx$
制約 $G(y) := \int_0^\pi y(x) dx = 1, y(0) = 0, y(\pi) = 0$
- (4) 最小化 $F(y) = \int_0^1 \left\{ (y'(x) - \cos(\pi x))^2 + 2e^x y(x) \right\} dx$
制約 $G(y) = \int_0^1 xy'(x) dx = -\frac{2}{\pi^2},$
 $y(0) = 2, y(1) = e$