最適化数学　第 4 回練習問題　(担当: 関口 良行)

所属: ______________　学籍番号: ______________　氏名: ______________

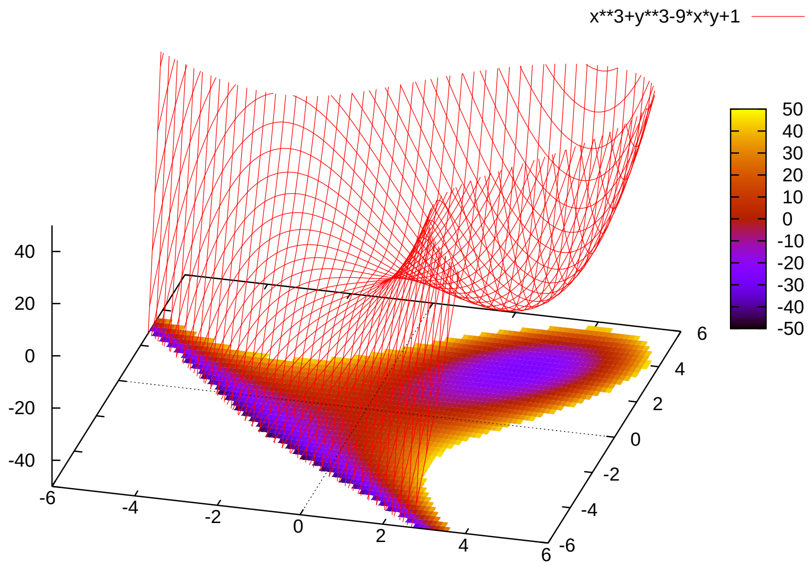
注意: 答え合わせの際は色ペンを使うこと.

次の関数の局所最適値を求めよ.

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$

   (解答例) $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x) = 0$ を解くと, 停留点は $(0,0), (3,3)$ となる. また, ヘッセ行列は $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix}$ となる. 停留点での正値性を調べると, $|\nabla^2 f(0,0)| < 0$ なので不定. $|\nabla^2 f(3,3)| > 0$ かつ $f_{xx}(3,3) > 0$ なので, ヘッセ行列は正定値になり, $(0,0)$ は局所最小解になる. 従って, $f(3,3) = -26$ は局所最小値である.

(x,y)	$(0,0)$	$(3,3)$
$\nabla^2 f(x,y)$	$-$	$+$
$f_{xx}(x,y)$		$+$
	不定	小
$f(x,y)$		-26

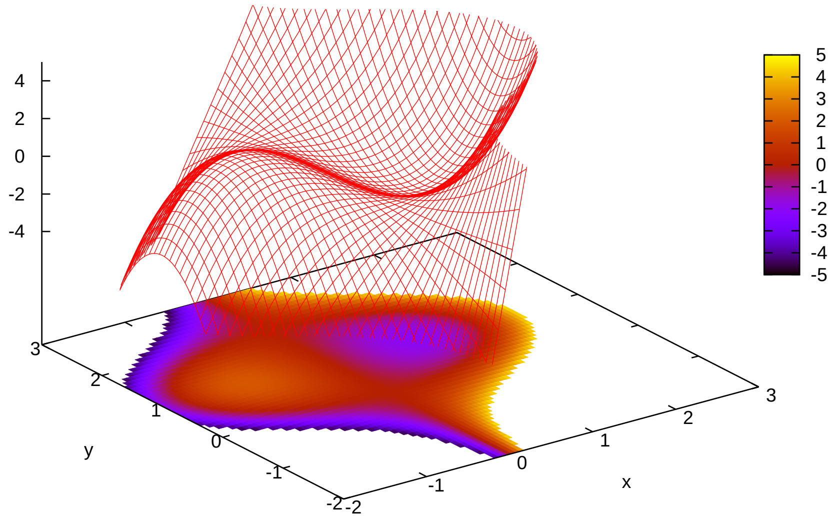


2. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$

   (解答例) $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 6y, 6xy - 6x) = (0,0)$ を解くと, 停留点は $(x,y) = (0,0), (0,2), (\pm 1, 1)$ となる. ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y-6 \\ 6y-6 & 6x \end{bmatrix}$ の停留点での正値性を調べると以下の表のようになる.

(x,y)	$(0,0)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(-1,1)$
$\nabla^2 f(x,y)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f_{xx}(x,y)$			$+$	$-$
	不定	不定	小	大
$f(x,y)$			-2	10

よって，$(1,1)$ で局所最小値 -2 をとり，$(-1,1)$ で局所最大値 10 をとる．



3. $f(x,y)=x^3+3xy^2-y^3-3x$

(解答例) $\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}3x^2+3y^2-3\\6xy-3y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ を解く．第 2 式より，$y(2x-y)=0$ を得る．以下場合分けをして解く．

$y=0$ の時，第 2 式は成り立つので，第 1 式より，$x^2-1=0$ を得る．よって，$x=\pm 1$ となるので，停留点は $(\pm 1,0)$．

$y\neq 0$ の時，第 2 式が成り立つためには $2x-y=0$ が必要である．よって，第 1 式で y を消去すると $5x^2-1=0$ となり，$x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ を得る．よって，停留点は $(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}})$ となる．

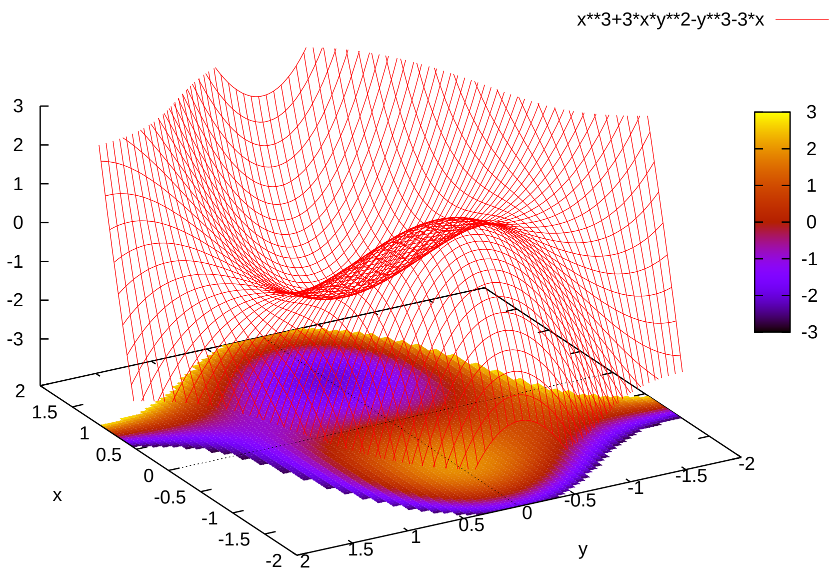
次にヘッセ行列 $\nabla^2 f(x,y)=\begin{bmatrix}6x&6y\\6y&6x-6y\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}x&y\\y&x-y\end{bmatrix}$ の正値性を調べる．

$|\nabla^2 f(1,0)|>0$ かつ $f_{xx}>0$ なので，$f(1,0)=-2$ は局所最小値である．

$|\nabla^2 f(-1,0)|>0$ かつ $f_{xx}<0$ なので，$f(-1,0)=2$ は局所最大値である．

$|\nabla^2 f(\pm 1/\sqrt{5},\pm 2/\sqrt{5})|<0$ なので不定である．

(x,y)	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(\pm 1/\sqrt{5},\mp 2/\sqrt{5})$
$\nabla^2 f(x,y)$	$+$	$+$	$-$
$f_{xx}(x,y)$	$+$	$-$	
	小	大	不定
$f(x,y)$	-2	2	



4. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy-yz-zx+x+y-2z+1$

(解答例) $\nabla f(x,y,z)=(2x+y-z+1,2y+x-z+1,2z-y-x-2)=(0,0,0)$ を解くと停留点は $(x,y,z)=(0,0,1)$ となる．ヘッセ行列

$$\nabla^2 f(x,y,z)=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

の正値性を調べる．この行列の固有値を求めると，$1,4$ となり，すべての固有値が正なので，ヘッセ行列は正定値になる．よって，$(0,0,1)$ で局所最小値 0 をとる．さらに，ヘッセ行列がすべての点で正定値になるので，f は凸関数になり，$f(0,0,1)=0$ は大域最小値にもなる．

5. $f(x,y) = 2x^4 - 2x^2 + y^2 + 2x^2y$

(解答例) $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x^3 - 4x + 4xy \\ 2y + 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解く.

第 2 式より, $y = -x^2$ を得る. 第 1 式より, $x(2x^2 - 1 + y) = 0$ を得るので, 以下場合分けをする.

$x = 0$ のとき, $y = 0$ である.

$x \neq 0$ のとき, $2x^2 - 1 + y = 0$ なので, 2 つの式から y を消去すると $x = \pm 1$ を得る. よって, 停留点は $(0,0), (\pm 1, -1)$ である.

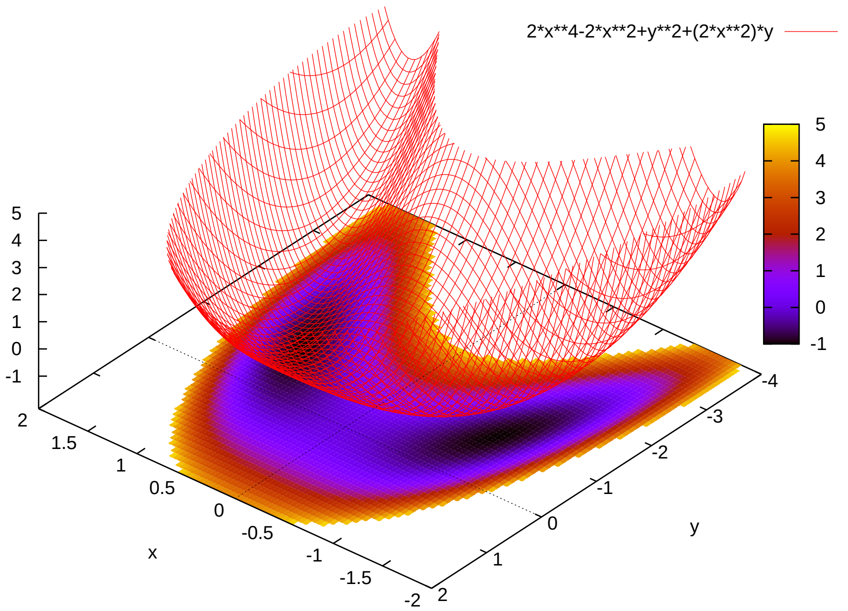
ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 4 + 4y & 4x \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$ の正値性を調べる.

$|\nabla^2 f(1,-1)| < 0$ なので $(0,0)$ は不定.

$|\nabla^2 f(1,-1)| > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ なので, $f(1,-1) = -1$ は局所最小値である.

$|\nabla^2 f(-1,-1)| > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ なので, $f(-1,-1) = -1$ も局所最小値である.

(x,y)	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,-1)$
$\nabla^2 f(x,y)$	$-$	$+$	$+$
$f_{xx}(x,y)$		$+$	$+$
	不定	小	小
$f(x,y)$	-1	-1	



感想・要望など