第1章　変分問題

1.1　変分問題

関数 $y(x)$ が表す曲線の $x=0$ から $x=1$ までの長さは，

$$F(y)=\int_0^1 \sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

で与えられる．本章では，このような「関数によって決まる値」を最小化する問題を扱う．

さて，関数に対してグラフの長さは一つに決まるので,「関数のグラフの長さ」は「関数を変数にもつ関数」になっている．一般に「関数を変数にもつ関数」を **汎関数**(はんかんすう) と呼び，汎関数を最小化または最大化する関数を探す問題を **変分問題** と呼ぶ．

本書では，汎関数の変数に使われる関数 $y(x)$ は十分な回数微分できるものとする．

変分問題の例

［例］ **1.1** (最速降下線)．二つの地点をつなぐ滑り台で最も降りるのが早いものの形を考えてみよう．いま，xy 平面で y 軸を下向きに取る．質点が $(a,0)$ から (b,B) まで，y 軸方向に重力と滑り台からの反発力を受けて移動するとき，最も早く (b,B) に到着するにはどのような形の滑り台を設計すればよいか？

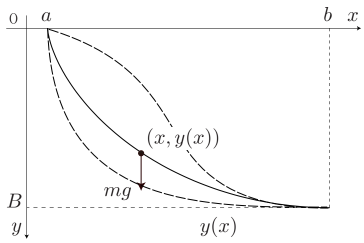


図 1.1: どれが一番早いか？

滑り台の形を関数 $y(x)$ のグラフで表す．重力による加速度を g とおくと，質量 m の質点が $y(x)$ まで下がったときの速さ v は，エネルギー保存則より $0=mv^2/2-mgy(x)$ を満たすので $v=\sqrt{2gy(x)}$ となる．微小区間における曲線の長さ を速さで割ることで，移動時間は

$$F(y)=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx$$

という汎関数で与えられる．よって，

$$y(a)=0,\ y(b)=B$$

となる関数の中で，この汎関数を最小にする関数のグラフが最速な滑り台の形を表す．

［例］ **1.2** (懸垂線)．両端が同じ高さで柱に結ばれたロープは，どのような形で垂れ下がるだろうか？両端の高さを h，ロープの長さを ℓ，単位長さあたりの質量を m とする．x 座標を水平方向，y 座標を垂直方向として，ロープの形を $y(x)$ という関数のグラフで表し，ロープの両端の x 座標を a，b とする．

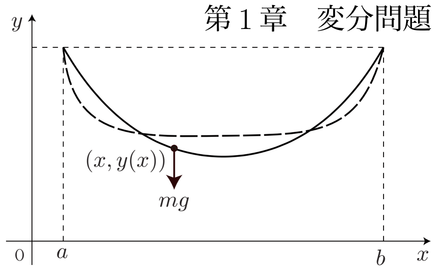


図 1.2: ロープの形は？

ロープは位置エネルギーを最小にするような形をとると考えられるので，位置エネルギーは

$$F(y) = \int_a^b \left(m\sqrt{1+y'(x)^2}\right) gy(x)\,dx$$

を長さ

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell,$$

両端 $y(a) = h, y(b) = h$ という条件のもとで最小化する問題を考えれば良い．

［例］ **1.3** (人員計画問題)．ある仕事の量を扱うのに必要な人員数を維持しながら，人件費をなるべく少なくできる人員計画を立てたい．

時期 x における仕事量を $s(x)$, 人員数 を $y(x)$ として，人件費を

$$F(y) = \int_0^1 \left\{ y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2 \right\} dx$$

と定義する．ここで人件費の式をこのように定義したのは，給与は人員数に比例するので $y(x)$ の 1 次式，雇用と解雇に必要な費用はより高額になるので，人員の増加率 $y'(x)$ の 2 次式と仮定したためである ．

すると，最適な人員計画は，

$$\begin{aligned} \text{最小化}\quad & F(y) = \int_0^1 \left\{ y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2 \right\} dx \\ \text{制約}\quad & y(x) \geq s(x),\ x \in [0,1] \end{aligned}$$

の解を求めることによって得られる．

1.1.1　汎関数

まず，次の単純な変分問題を考えてみよう．

$$\begin{aligned} \text{最小化}\quad & F(y) = \int_0^1 \left\{ y(x) - 1 \right\}^2 dx \\ \text{制約}\quad & \text{なし} \end{aligned} \tag{1.1}$$

汎関数 F に具体的な関数を代入して，値を計算する．例えば，関数が

$$y_1(x)=x \text{ のときは } F(y_1)=\int_0^1 \left\{x-1\right\}^2 dx=\frac{1}{3}$$
$$y_2(x)=x^2 \text{ のときは } F(y_2)=\int_0^1 \left\{x^2-1\right\}^2 dx=\frac{8}{15}$$

という値になる．よって，F の値を比べると

$$F(y_2)>F(y_1)$$

となる．それでは，$F(y)$ の値を一番小さくするのはどのような関数 $y(x)$ か？　このような問題を考えるのが変分問題である．

発見的に最小解を見つける

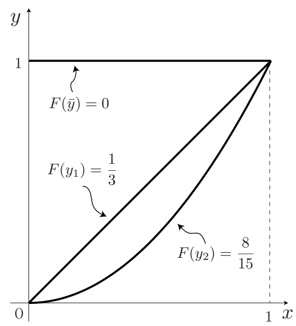
さて，問題 (1.1) に関しては推測で解を見つけることができる．ここで，鍵となるのが積分に関する

$$\text{区間 [a, b] で } f(x)\geq 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \tag{1.2}$$

という性質である．これより，問題 (1.1) の汎関数 F の値ははすべての関数 $y(x)$ に対して 0 以上となる．そこで，F の値を 0 にするような $y(x)$ を探す．いま $\bar{y}(x)=1$（定数関数）とおくと，$F(\bar{y})=0$ なので，すべての $y(x)$ に対して

$$F(y)=\int_0^1 \left\{y(x)-1\right\}^2 dx \geq 0 = F(\bar{y})$$

が成り立つ．したがって，$\bar{y}(x)=1$ は問題 (1.1) の最小解となる．



関数の微分に依存する汎関数

変分問題に慣れるために次の問題も推測で解いてみよう．

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad F(y)=\int_1^2 \left\{y'(x)-1\right\}^2 dx \\ &\text{制約} \quad y(1)=2,\ y(2)=3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

この問題では，積分の中に微分 $y'(x)$ があること，積分区間が $[1,2]$ であること，制約が付いていることに注意してほしい．

さて，この問題の汎関数 F も，性質 (1.2) よりすべての $y(x)$ に対して 0 以上となる．

よって，F の値を 0 するような制約を満たす関数 $y(x)$ を探す．まず，F の値を 0 にするには，明らかに

$$y'(x) = 1$$

となればよい．また，制約より

$$y(1) = 2,\, y(2) = 3$$

も必要である．この二つを満たす関数を探せば，

$$\bar{y}(x) = x + 1$$

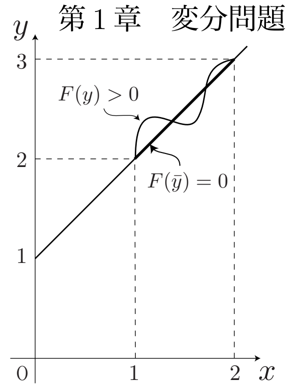


図 1.3: $\bar{y}(x)$ からずれると微分の絶対値が正になる

とすると，$F(\bar{y}) = 0$ となり制約を満たすことがわかる．したがって，$y(1) = 2$, $y(2) = 3$ を満たすすべての関数 $y(x)$ に対して

$$F(y) = \int_1^2 \left\{ y'(x) - 1 \right\}^2 dx \geq 0 = F(\bar{y})$$

が成り立つので，$\bar{y}(x) = x + 1$ は最小解となる．

変分問題の一般形

変分問題の一般形は，汎関数 $F(y)$ を用いて

$$\text{最小化 } F(y) \quad \text{制約 } y \in C \tag{1.4}$$

のように書ける．ここで，$F(y)$ を **目的汎関数** と呼ぶ．また，$y \in C$ とは，関数 $y(x)$ が関数の集合 C に入っていることを表す．

以下で，最小解を改めて定義する．

［定義］ **1.4.** 関数 $\bar{y}(x) \in C$ がすべての関数 $y(x) \in C$ に対して $F(y) \geq F(\bar{y})$ を満たすとき，$\bar{y}(x)$ を問題 (1.4) の大域最小解と呼ぶ．

［定義］ **1.5.** 関数 $\bar{y}(x) \in C$ が $\bar{y}(x)$ に十分「近い」すべての関数 $y(x) \in C$ に対して $F(y) \geq F(\bar{y})$ を満たすとき，$\bar{y}(x)$ を問題 (1.4) の局所最小解と呼ぶ．

ただし，関数が「近い」ことについては以下で説明する．

関数の近さ

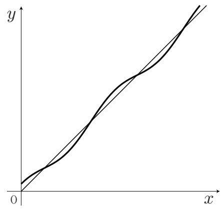


図 1.4: 細い線が $y(x)=x$，太い線が $y(x)=x+0.04\cos(4\pi x)$ のグラフ

関数 $\bar{y}(x)$ に「近い」関数とは，$y(x)$ とグラフが近い関数のことを指す．例えば，関数 $v(x)$ と十分小さい数 ε に対して

$$\bar{y}(x)+\varepsilon v(x)$$

という関数を考えると，この関数のグラフは $\bar{y}(x)$ のグラフが少し変化したものになっているので，$\bar{y}(x)$ に「近い」関数である（図 1.4）．

ノルム

関数の「近さ」を数学的に定義する方法はいくつもあり，問題によって適切なものが選ばれる．ここでは代表的なものを二つ挙げよう．関数 $y(x)$, $\bar{y}(x)$ に対して

$$\|y-\bar{y}\|_0 := \max_{a\le x\le b}|y(x)-\bar{y}(x)|$$

を ノルム と呼ぶ．ここで，右辺は $|y(x)-\bar{y}(x)|$ の $a\le x\le b$ での最大値を表す．例えば

$$\|y-\bar{y}\|_0 \le \frac{1}{10}$$

のとき，

$$|y(x)-\bar{y}(x)| \le \frac{1}{10} \quad (a\le x\le b)$$

となるので，$y-\bar{y}$ のノルムの小ささと関数の「近さ」が対応していることが分かるだろう．また

$$\|y-\bar{y}\|_1 := \max_{a\le x\le b}|y(x)-\bar{y}(x)| + \max_{a\le x\le b}\left|y'(x)-\bar{y}'(x)\right|$$

も使われる．これは関数の「近さ」を測るのに，微分の「近さ」も考慮するものである．関数の「近さ」を測るのにどのノルムを用いるかによって，問題の性質も異なってくる．本書ではどちらのノルムを用いても成り立つ結果のみを扱う（もちろん $y(x)$ は十分な回数微分できるものとする）．

制約を満たし「近い」関数

さらに制約

$$y(0)=0,\ y(1)=1 \tag{1.5}$$

がある場合を考える．いま $\bar{y}(x)$ は制約を満たすとする．このとき，制約 (1.5) を満たし，関数 $\bar{y}(x)$ に「近い」関数とはどのようなものだろうか？この場合は

$$v(0)=0,\ v(1)=0$$

を満たす $v(x)$ と十分小さい数 ε に対して

$$\bar{y}(x)+\varepsilon v(x)$$

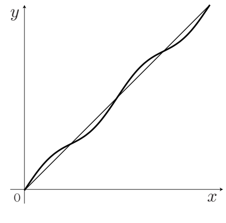


図 1.5: 細い線が $y(x)=x$，太い線が $y(x)=x+0.04\sin(4\pi x)$ のグラフ．端が一致していることに注意

とすればよい．すると，

$$\bar{y}(0) + \varepsilon v(0) = 0, \quad \bar{y}(1) + \varepsilon v(1) = 1$$

となるので，関数 $\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)$ は，制約 (1.5) を満たし，グラフが $\bar{y}(x)$ に「近い」関数である（図 1.5）.

被積分関数

本節の残りで汎関数に関する言葉と記号を説明する．本書では 3 変数関数 $f(x, y, z)$ に対して，

$$F(y) = \int_a^b f\left(x, y(x), y'(x)\right)\, dx$$

と定義される汎関数を扱う．ここで，$f(x, y, z)$ の y 変数に $y(x)$，z 変数に $y'(x)$ を代入している．この f を 被積分関数 と呼ぶ．被積分関数とは単に「積分される関数」と言う意味だが，本章では汎関数の定義に使われるこの $f(x, y, z)$ を指す言葉として使う．また，$f(x, y, z)$ は実数上の関数で十分滑らか なものとする．

［例］ **1.6.** (1). 問題 1.1 の目的汎関数 $\displaystyle\int_0^1 \left\{y(x) - 1\right\}^2 dx$ の被積分関数は

$$f(x, y, z) = (y - 1)^2$$

である.

(2). 前節の人員計画問題（例 1.3）の目的汎関数 $\displaystyle\int_a^b \left\{y(x) + \frac{1}{2} y'(x)^2\right\} dx$ の被積分関数は

$$f(x, y, z) = y + \frac{1}{2} z^2$$

である.

被積分関数の省略記号

汎関数を表すときなどに，常に $f(x, y(x), y'(x))$ と書くと表記が煩雑になるので，関数の括弧に “[　]” を用いて

$$f(x, y(x), y'(x)) = f\big[y(x)\big]$$

と表すことにする．右辺には y' が書かれていないが, x と関数 $y(x)$ が決まれば $y'(x)$ も決まるので, このように省略をしても差し支えない. この省略記号を使うと

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx = \int_a^b f[y(x)]\, dx$$

とすっきり書ける.

［練習問題］ **1.** 次の汎関数の値を与えられた関数に対して計算せよ．

$$F(y) = \int_0^1 \left\{ xy(x) + y'(x)^2 \right\} dx$$

(1) $y(x) = 3x^2$　(2) $y(x) = \sin(\pi x)$

1.1.2　方向微分

推測で解を見つけられる問題は非常に特殊な問題に限られる．数ベクトル上の最適化問題と同様に，変分問題でも汎関数の微分を用いて，最適解を見つける一般的な方法がある．

1 変数関数の場合，微分係数とは変数を少し変化させたときに関数値が変化する割合（瞬間変化率）を指した．汎関数の微分も，

関数を少し変化させたときに汎関数値が変化する割合（瞬間変化率）

のようなもので定義したい．

汎関数値の変化量

関数 $y(x)$ を「少し変化させる」とは，関数 $v(x)$ と小さい数 ε に対して，$y(x)$ を

$$y(x) + \varepsilon v(x)$$

とすることを指すことする．なおこの関数は，$y(x)$ のグラフを少し変化させたものをグラフに持ち，関数 $y(x)$ に「近い」関数である．このように関数を変化させたとき，汎関数

$$F(y) = \int_0^1 y(x)^2 \, dx$$

の値がどのように変化するか調べてみよう．いま，汎関数値の変化量は

$$F(y + \varepsilon v) - F(y)$$

となる．ここで，汎関数の変数に対して，それぞれ

$$\begin{aligned} F(y) &\longleftrightarrow y(x) \\ F(y + \varepsilon v) &\longleftrightarrow y(x) + \varepsilon v(x) \end{aligned}$$

という関数を代入していることに注意する．

具体的な関数に対する汎関数値の変化量

始めに，簡単な関数 $y(x)=x^2,\quad v(x)=x^3$ に対して汎関数値の変化量を計算しよう．いま $y(x)+\varepsilon v(x)=x^2+\varepsilon x^3$ なので，

$$\begin{aligned}F(y+\varepsilon v)-F(y)&=\int_0^1\left(x^2+\varepsilon x^3\right)^2\,dx-\int_0^1\left(x^2\right)^2\,dx\\&=\int_0^1\left(x^4+2\varepsilon x^5+\varepsilon^2x^6-x^4\right)\,dx\\&=\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{7}\varepsilon^2\end{aligned}$$

を得る．これが関数 $y(x)$ が

$$x^2\ \rightarrow\ x^2+\varepsilon x^3$$

と変化したときの汎関数値の変化量である．

次に，この関数の変化に対する汎関数値の平均変化率を調べたい．しかし，実は汎関数に対して平均変化率そのものを定義するのは難しい．

汎関数値の疑似的な変化率

そこで計算を簡単にするため，両辺を ε で割ることで ε の変化量のみを考慮した疑似的な平均変化率

$$\frac{F(y+\varepsilon v)-F(y)}{\varepsilon}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\varepsilon$$

を使用する．これを「v 方向の平均変化率」と呼ぼう．さらに，$\varepsilon\to 0$ と極限をとると

$$(\ v\ \text{方向の瞬間変化率})\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(y+\varepsilon v)-F(y)}{\varepsilon}=\frac{1}{3}$$

が得られる．これを用いて，一般の汎関数の微分を定義する．

［定義］ **1.7.** 汎関数 F と関数 $y(x)$, $v(x)$ に対して，

$$F(y)(v):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(y+\varepsilon v)-F(y)}{\varepsilon}$$

を y における v に対する 方向微分 と呼ぶ．

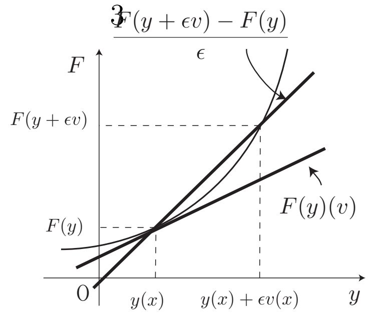


図 1.6: 方向微分のイメージ．変分問題では関数の集合を思い切って直線で描いてしまうと分かりやすい．

一般の関数についての方向微分

次に，任意の $y(x)$，$v(x)$ に対して，

$$F(y)=\int_0^1 y(x)^2\,dx$$

の方向微分を求めてみよう．まず変化量を計算すると

$$
\begin{aligned}
F(y+\varepsilon v)-F(y) &= \int_0^1 \{y(x)+\varepsilon v(x)\}^2\,dx - \int_0^1 \{y(x)\}^2\,dx \\
&= \int_0^1 \left\{y(x)^2+2\varepsilon v(x)y(x)+\varepsilon^2 v(x)^2-y(x)^2\right\}dx \\
&= \int_0^1 \left\{2\varepsilon v(x)y(x)+\varepsilon^2 v(x)^2\right\}dx \\
&= 2\varepsilon\int_0^1 v(x)y(x)\,dx+\varepsilon^2\int_0^1 v(x)^2\,dx
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

となる．これより「v 方向の平均変化率」を求めると，

$$\frac{F(y+\varepsilon v)-F(y)}{\varepsilon} = 2\int_0^1 v(x)y(x)\,dx+\varepsilon\int_0^1 v(x)^2\,dx$$

となる．よって，$\varepsilon \to 0$ とすると，

$$DF(y)(v) = 2\int_0^1 v(x)y(x)\,dx$$

を得る．これが任意の関数 $y(x)$，$v(x)$ に対する汎関数 F の方向微分である．

方向微分の公式

上記のように定義から直接求める方法もあるが，方向微分には次の便利な公式がある．

［命題］ **1.8.** 汎関数 $F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y(x),y'(x))\,dx$ に対して，方向微分は

$$DF(y)(v) = \int_a^b \{f_y[y(x)]v(x)+f_z[y(x)]v'(x)\}\,dx$$

と表せる．ここで，f_y は第 2 変数, f_z は第 3 変数に関する偏微分を表す．

証明. まず，関数 $y(x),v(x)$ に対して

$$\phi(\varepsilon) = F(y+\varepsilon v) \quad (1\text{ 変数関数})$$

とおく．すると，$\dfrac{F(y+\varepsilon v)-F(y)}{\varepsilon} = \dfrac{\phi(\varepsilon)-\phi(0)}{\varepsilon}$ となるので，定義より方向微分は

$$DF(y)(v) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(y+\varepsilon v)-F(y)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\varepsilon)-\phi(0)}{\varepsilon} = \phi'(0)$$

となる．ここで，$\phi'(0)$ を求めるために $\phi(\varepsilon)$ の微分を計算する．いま，$[a,b]$ は有界閉区間, f は充分滑らかとしているので

$$\frac{d}{d\varepsilon}\phi(\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b f[y(x)+\varepsilon v(x)]\,dx=\int_a^b \frac{d}{d\varepsilon}f[y(x)+\varepsilon v(x)]\,dx \tag{1.7}$$

が成り立つ．ここで，省略記号を元に戻した

$$\frac{d}{d\varepsilon}f[y(x)+\varepsilon v(x)]=\frac{d}{d\varepsilon}f(x,y(x)+\varepsilon v(x),y'(x)+\varepsilon v'(x)) \tag{1.8}$$

を計算する. いま，各 x の値に対して関数の値 $y(x),y'(x),v(x),v'(x)$ は単に数なので，式 (1.8) で

$$y(x)=y_1,\ y'(x)=z_1,\ v(x)=v_1,\ v'(x)=v_2$$

とおくと，多変数関数の合成関数の微分公式 より，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\varepsilon}\big\{f(x,y_1+\varepsilon v_1,z_1+\varepsilon v_2))\big\}\\&\qquad=f_y(x,y_1+\varepsilon v_1,z_1+\varepsilon v_2)v_1\\&\qquad\quad+f_z(x,y_1+\varepsilon v_1,z_1+\varepsilon v_2)v_2\end{aligned}$$

となる．よって y_1 などを関数にもどすと

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\varepsilon}f(x,y(x)+\varepsilon v(x),y'(x)+\varepsilon v'(x))\\&\qquad=f_y(x,y(x)+\varepsilon v(x),y'(x)+\varepsilon v'(x))v(x)\\&\qquad\quad+f_z(x,y(x)+\varepsilon v(x),y'(x)+\varepsilon v'(x))v'(x)\\&\qquad=f_y\big[y(x)+\varepsilon v(x)\big]v(x)+f_z[y(x)+\varepsilon v(x)]v'(x)\end{aligned}$$

となる．よって，これを式 (1.7) に代入すると

$$\frac{d}{d\varepsilon}\phi(\varepsilon)=\int_a^b\Big\{f_y\big[y(x)+\varepsilon v(x)\big]v(x)+f_z\big[y(x)+\varepsilon v(x)\big]v'(x)\Big\}\,dx$$

を得る．この式で $\varepsilon=0$ とすると，方向微分の公式を得る．　□

［補足］. 例えば，汎関数 F の被積分関数 $f(x,y)$ が z 変数を持たず

$$F(y)=\int_a^b f[y(x)]dx=\int_a^b f(x,y(x))dx$$

でとなっているときは，以下が成り立つ：

$$DF(y)(v)=\int_a^b f_y[y(x)]v(x)dx=\int_a^b f_y(x,y(x))v(x)dx$$

方向微分の例

［例］ **1.9.** (1). 汎関数が $F(y) = \displaystyle\int_0^1 y(x)^2\,dx$ のとき，被積分関数は $f(x,y,z) = y^2$ となる．$f_y = 2y$，$f_z = 0$ なので，

$$DF(y)(v) = \int_0^1 2y(x)v(x)\,dx$$

となる．

(2). 汎関数が $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \left\{ y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2 \right\} dx$ のとき，被積分関数は $f(x,y,z) = y + \frac{1}{2}z^2$ となる．$f_y = 1$，$f_z = z$ なので，方向微分は

$$\begin{aligned} DF(y)(v) &= \int_0^1 \{f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 \{v(x) + y'(x)v'(x)\}\,dx \end{aligned}$$

となる．

［練習問題］ **2.** 以下の汎関数の被積分関数を書き，関数 $y(x)$ における $v(x)$ に対する方向微分を求めよ．

$$(1).\ F(y) = \int_0^1 \left\{xy(x) + y'(x)^3\right\} dx \quad (2).\ G(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

1.1.3 凸汎関数

数ベクトルの最小化問題を考えるときに凸関数が重要な役割を果たした．$\mathbb{R}^n$ の凸関数は次の性質を持っていた；

$$\begin{aligned} f \text{ が凸関数である } &\Leftrightarrow \text{ 任意の } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ ついて } f(v) \geq f(u) + \nabla f(u)(v-u) \\ &\Leftrightarrow \text{ 任意の } u \text{ についてヘッセ行列 } \nabla^2 f(u) \text{ が半正定値} \end{aligned}$$

ここでは，汎関数について凸性を考える．

［定義］ **1.10.** F を汎関数とする．任意の関数 $y(x), v(x)$ に対して

$$F(y+v) \geq F(y) + DF(y)(v)$$

が成り立つとき，F を **凸汎関数** と呼ぶ．

また，上の不等式がある集合 C 内の関数 $y(x)$ と，$y(x) + v(x) \in C$ となる $v(x)$ に対してのみ成り立つ場合は，F は C 上で凸であるという．

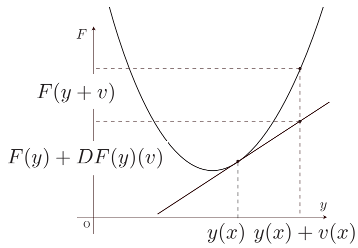


図 1.7: 凸汎関数のイメージ図．横軸を関数の集合として普通の凸関数と同様にイメージできる．

［例］ **1.11.**

$$F(y) = \int_0^1 y(x)^2 \, dx$$

は凸汎関数である．実際，式変形 (1.6) より，

$$F(y+v) - F(y) = 2\int_0^1 v(x)y(x)\,dx + \int_0^1 v(x)^2\,dx$$
$$\geq 2\int_0^1 v(x)y(x)\,dx = DF(y)(v)$$

となる．

汎関数が凸になる条件

次に，一般的な凸性の判定法を紹介する．まず次の言葉を用意する．

［定義］ **1.12.** 3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対して，x を定数と見なし，(y,z) の関数を

$$g(y,z) = f(x,y,z)$$

とおく．すべての x に対して $g(y,z)$ が凸関数であるとき，$f(x,y,z)$ は 第 2，第 3 変数に関して凸 であるという．

［命題］ **1.13.** 3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対して，

$f(x,y,z)$ が第 2，第 3 変数に関して凸
$\Leftrightarrow$ 任意の x,y,z に対して $\begin{bmatrix} f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix}$ が半正定値

が成り立つ．

［定理］ **1.14.** 汎関数を $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y(x),y'(x))dx$ とする．任意の $x \in [a,b]$ に対して，被積分関数 $f(x,y,z)$ が第 2，第 3 変数に関して凸ならば，汎関数 F も凸である．

証明． f は第 2，第 3 変数に関して凸なので，任意の実数 v_1, v_2 に対して，

$$f(x, y+v_1, z+v_2) \geq f(x,y,z) + f_y(x,y,z)v_1 + f_z(x,y,z)v_2$$

が成り立つ．この式に

$$y = y(x),\ z = y'(x),\ v_1 = v(x),\ v_2 = v'(x)$$

と代入して，省略記号を用いると

$$f[y(x)+v(x)] \geq f[y(x)] + f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)$$

となる．ここで両辺を積分すると

$$\int_a^b f[y(x)+v(x)]dx \geq \int_a^b f[y(x)]\,dx + \int_a^b \left\{ f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x) \right\}\,dx$$

を得る．これは方向微分の公式より

$$F(y+v) \geq F(y) + DF(y)(v)$$

を表す．したがって，汎関数 F は凸になる．　□

凸汎関数の例

［例］ **1.15.** (1)．$F(y) = \int_a^b \left\{x + y(x)^2 + y'(x)^2\right\} dx$

被積分関数 $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$ は凸関数なので F は凸汎関数である．

(2)．$F(y) = \int_a^b \left\{-x^2 + y(x)^2 + y'(x)^2\right\} dx$

被積分関数 $f(x,y,z) = -x^2 + y^2 + z^2$ は (x,y,z) に関しては凸ではないが，x を定数とみなすと，第 2, 第 3 変数に関しては凸である．したがって，F は凸汎関数である．

［練習問題］ **3.** 次の汎関数が凸かどうか調べよ

(1). $F(y) = \int_0^1 \{e^x y(x) + y'(x)^2\}\,dx$　(2). $F(y) = \int_0^1 \{-x^2 + y(x)^2 + \sqrt{1+y'(x)^2}\}\,dx$

1.2　変分問題の最適性条件

変分問題では以下の問題が基本になる：

$$\begin{aligned} &\text{最小化 } F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\ &\text{制約 } y(a) = A, y(b) = B \end{aligned} \tag{1.9}$$

まずこの問題の解法を勉強しよう．数ベクトル上の最適化問題で学んだように変分問題に対しても最適性条件があり，それを用いて最適解を求めることができる．

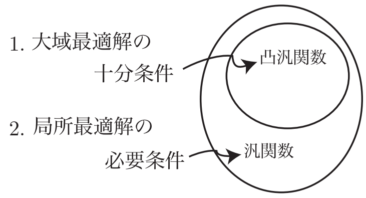
この問題には最適解の候補となる関数 y に対して，$y(a) = A, y(b) = B$ という制約がついているので，固定端問題 と呼ばれる．

［例］ **1.16.** 例 1.1 に挙げた最速降下線問題は

$$\begin{aligned} &\text{最小化}\quad F(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx \\ &\text{制約}\quad y(a) = 0,\ y(b) = B \end{aligned}$$

と書けるので，固定端問題である．

以下，議論が易しい順に



(1). 凸汎関数の　　大域最適解の十分条件

(2). 汎関数の　　　局所最適解の必要条件

という順番で説明する．

方向微分の第 2 公式

準備として，方向微分の公式を別の式で表しておこう．

［補題］ **1.17** (方向微分の第 2 公式)**.** 汎関数 $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$ に対して，方向微分は

$$DF(y)(v) = \int_a^b \left[f_y[y(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[y(x)] \right\} \right] v(x)\,dx + \Big[f_z[y(x)]v(x) \Big]_a^b$$

と表せる．

証明. 方向微分の公式（命題 1.8）に部分積分を用いると

$$\begin{aligned} DF(y)(v) &= \int_a^b \{ f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x) \}\,dx \\ &= \int_a^b f_y[y(x)]v(x)\,dx + \Big[f_z[y(x)]v(x) \Big]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left\{ f_z[y(x)] \right\} v(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left[f_y[y(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[y(x)] \right\} \right] v(x)\,dx + \Big[f_z[y(x)]v(x) \Big]_a^b \end{aligned}$$

となる． □

1.2.1　凸汎関数に対する最適性十分条件

始めに，目的汎関数が凸汎関数のとき，大域最適解の十分条件を求める．

［定理］ **1.18.**

$$\begin{aligned} \text{最小化 } & F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\ \text{制約 } & y(a) = A, y(b) = B \end{aligned} \tag{1.10}$$

において, 目的汎関数 F が凸汎関数であるとする．関数 $\bar{y}(x)$ が

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

の解ならば，$\bar{y}(x)$ は問題 (1.10) の大域最小解である．

証明. $\bar{y}(x)$ が問題 (1.10) の大域最小解であることを示すには，

$$F(y) \geq F(\bar{y}) \quad (\ y(a)=A, y(b)=B \text{ を満たすすべての関数 } y(x)\ )$$

を示せば良い．これは，$\bar{y}(a)=A, \bar{y}(b)=B$ なので，$v(x)=y(x)-\bar{y}(x)$ とおくことにより

$$F(\bar{y}+v) \geq F(\bar{y}) \quad (\ v(a)=v(b)=0 \text{ を満たすすべての関数 } v(x)\ )$$

と同値である．以下で後者を示す．関数 $\bar{y}(x)$ を

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(a)=A,\ y(b)=B \end{cases}$$

の解とし，$v(x)$ を $v(a)=v(b)=0$ を満たす任意の関数とする．ここで，方向微分の第 2 公式（補題 1.17 ）を用いると

$$DF(\bar{y})(v) = \int_a^b \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \right] v(x)\,dx + \Big[f_z[\bar{y}(x)]v(x) \Big]_a^b = 0 \tag{1.11}$$

となる．いま，目的関数 F が凸なので，

$$F(y+v) \geq F(\bar{y}) + DF(\bar{y})(v) = F(\bar{y})$$

が成り立つ. よって $\bar{y}$ は (P) の大域最小解になる. □

停留関数

［定義］ **1.19.**

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(a)=A,\ y(b)=B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を，停留関数 と呼ぶ．また，上記の式

$$\frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \tag{1.12}$$

を オイラー方程式 と呼ぶ.

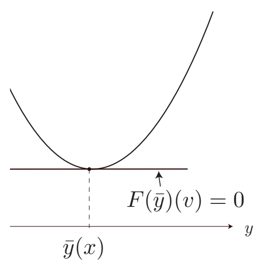


図 1.8: 凸汎関数の停留関数

$\bar{y}$ を固定すると，方向微分 $DF(\bar{y})(v)$ の値は関数 $v(x)$ によって決まるので，v を変数とする汎関数 $DF(\bar{y})(\cdot)$ と見なすことができる．式 (1.11) より，停留関数 $\bar{y}(x)$ とは $DF(\bar{y})(\cdot)$ が「零汎関数」:

$$DF(\bar{y})(v) = 0\ (\ v(a)=v(b)=0 \text{ を満たすすべての } v(x))$$

となる関数のことである．数ベクトル上の最適化問題における事実「最適解ならば微分が 0」と同様の関係が成り立っている．

1.2.2　解法例

［例］ **1.20** (目的汎関数が凸の場合).

$$\begin{aligned} &\text{最小化}\ F(y) := \int_0^1 \{y(x) + y'(x)^2\}\,dx \\ &\text{制約}\ y(0) = 1,\ y(1) = 2 \end{aligned}$$

の最小解を求めよ．

目的汎関数 F の被積分関数は

$$f(x, y, z) = y + z^2$$

となり，これは第 2，第 3 変数に関して凸である．よって，定理 *2.5* より，

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{f_z[y(x)]\} = f_y[y(x)] \\ y(0) = 1,\ y(1) = 2 \end{cases}$$

満たす関数が大域最小解になる．いま，

$$\begin{aligned} &f_y = 1, \quad f_z = 2z, \\ &f_y[y(x)] = 1, \quad f_z[y(x)] = 2y'(x) \end{aligned}$$

なので，オイラー方程式（ $(*)$ の第 1 式）は

$$\frac{d}{dx}\{2y'(x)\} = 1$$

となり，

$$2y''(x) = 1$$

を得る．これは，両辺を 2 回不定積分することにより，

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}x + c_1 \\ y(x) &= \frac{1}{4}x^2 + c_1 x + c_2 \qquad (c_1, c_2\ \text{は任意の定数}) \end{aligned}$$

となる．ここで，$y(0) = 1, y(1) = 2$ より，

$$\begin{cases} c_2 = 1 \\ \dfrac{1}{4} + c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

を満たす．これを解くと $c_1 = 3/4, c_2 = 1$ となるので，

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

が求める大域最小解になる．

1.2.3　一般の汎関数に対する最適性必要条件

次に，一般の汎関数に対して局所最適解の必要条件を求める．

［定理］ **1.21.**

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化}\ F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\
&\text{制約}\ y(a) = A,\ y(b) = B
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

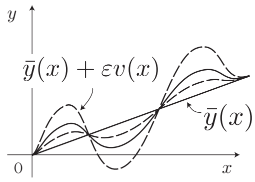
に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $\bar{y}(x)$ は，以下を満たす：

$$
(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[\bar{y}(x)] = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B. \end{cases}
$$

解説 . まず，$\bar{y}(x)$ が局所最小解であるので

$F(y) \geq F(\bar{y})$

（制約 $y(a) = A,\ y(b) = B$ を満たし $\bar{y}(x)$ に十分近いすべての $y(x)$）



が成り立つ．ここで，$v(x)$ を

$$v(a) = 0,\ v(b) = 0$$

を満たす任意の関数とする ．それに対して，ε を十分小さい数とすれば

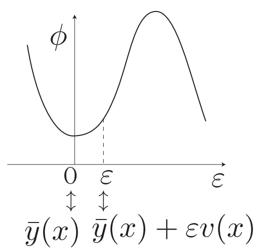
$$\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)$$

は，制約を満たし $\bar{y}(x)$ に近い関数である．よって，

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y}) \quad \text{（十分小さい } \varepsilon \text{ ）}$$

が成り立つ．

ここで $\phi(\varepsilon) = F(\bar{y} + \varepsilon v)$ とおくと



$$\phi(\varepsilon) \geq \phi(0) \quad \text{（十分小さい } \varepsilon \text{ ）}$$

が成り立つ．いま，$\phi(\varepsilon)$ は 1 変数関数なので，$\varepsilon = 0$ が局所最小解であることから $\phi'(0) = 0$ が成り立つ．方向微分の定義より，これは

$$DF(\bar{y})(v) = 0 \tag{1.14}$$

を表す ．方向微分の第 2 公式（補題 1.17）と $v(a) = v(b) = 0$ より

$$
\begin{aligned}
0 &= DF(y)(v) \\
&= \int_a^b \Big[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \Big] v(x)\, dx + \Big[f_z[\bar{y}(x)] v(x) \Big]_a^b \\
&= \int_a^b \Big[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \Big] v(x)\, dx
\end{aligned}
$$

を得る．よって

$$
\int_a^b \Big[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \Big] v(x)\, dx = 0
$$

$$
\text{（ } v(a)=0, v(b)=0 \text{ を満たすすべての } v(x) \text{ ）} \tag{1.15}
$$

が成り立つ．

最後に，式 (1.15) を用いて

$$
h(x) := f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)\right\} = 0 \quad \text{（定数関数）}
$$

を示す．そのため背理法を用いる．いま，ある点 $x = p$ で $h(p) \neq 0$ とする．すると，点 p に近い点 x でも $h(x) \neq 0$ となる．

ここで，関数 $v_p(x)$ を図 1.9 のような関数とすると，

$$
\int_a^b \Big[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \Big] v_p(x)\, dx \neq 0
$$

となるので，(1.15) に矛盾する．

したがって，$h(x) = 0$（定数関数）となり

$$
f_y[\bar{y}(x)] = \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)\right\}
$$

が成り立つ． □

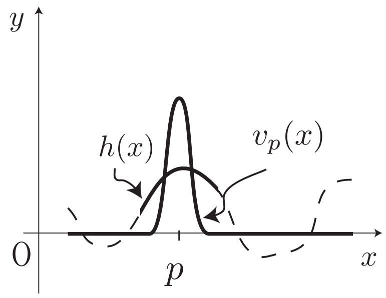


図 1.9: 関数 $v_p(x)$ は点 p から離れたところでは 0．

オイラー方程式の吟味

上記の解説より，関数 $\bar{y}(x)$ を問題 (1.13) の局所最小解とすると，$\bar{y}(x)$ はオイラー方程式を満たすことが分かった．しかし，イメージがつかみづらいと思われるので，もう一度オイラー方程式を吟味してみよう．

例えば，$\bar{y}(x)$ を代入しても，ある点 $x = p$ でオイラー方程式が満たされていないとする．このとき，図 1.10 のように，点 $x = p$ の近くでだけ $\bar{y}(x)$ を少し動すと，方向微分の第 2 公式より v_p 方向の瞬間変化率は

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\bar{y} + \varepsilon v_p) - F(\bar{y})}{\varepsilon} &= DF(y)(v_p) \\
&= \int_a^b \Big[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \Big] v_p(x)\, dx \neq 0
\end{aligned}
$$

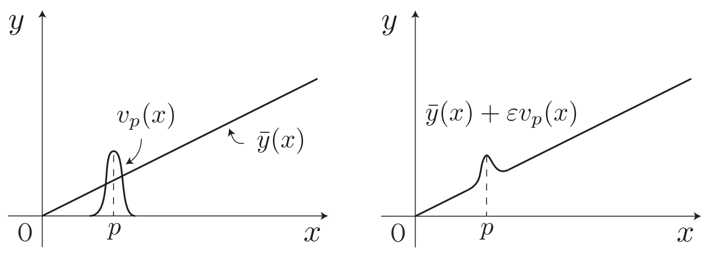


図 1.10: 分かりやすさのため $\bar{y}(x)$ を直線とする．右図は $x=p$ の近くを少し動かした関数

となる．ここで，$\bar{y}$ における汎関数 F の v_p 方向の瞬間変化率が 0 でないということは，$x=p$ の近くで関数 $\bar{y}(x)$ を少し動かすことで，F の値を $F(\bar{y})$ より減らせるということを意味している．これは $\bar{y}(x)$ が最小解であることと矛盾する．

停留関数と最小解の関係

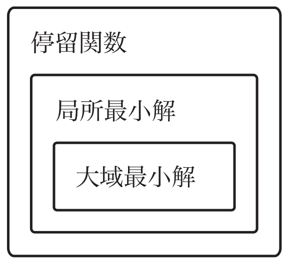


図 1.11: 停留関数と最小解の関係図

変分問題においても停留関数と最小解は図 1.11 のようになり，停留関数であっても最小解でない関数が存在する．しかし，目的汎関数が凸のときはすべて一致する．

［系］ **1.22.** 変分問題 (1.13) において，目的汎関数 F を凸汎関数とする．すると，局所最小解はすべて大域最小解になり，

$$\bar{y}(x) \text{ が大域最小解} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A, \bar{y}(b) = B \end{cases}$$

が成り立つ．

1.2.4　解法例

［例］ **1.23** (目的汎関数が凸でない場合)．

$$\text{最小化 } F(y) := \int_0^1 \frac{1}{3} y'(x)^3 \, dx$$
$$\text{制約 } y(0)=1,\ y(1)=2$$

の停留関数を求めよ．いま，

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{f_z[y(x)]\} = f_y[y(x)] \\ y(0)=1,\ y(1)=2 \end{cases}$$

を満たす関数を求めればよい．被積分関数は $f(x,y,z)=\dfrac{1}{3}z^3$ となるので，

$$
\begin{aligned}
&f_y=0, \quad f_z=z^2\\
&f_y\bigl[y(x)\bigr]=0, \quad f_z\bigl[y(x)\bigr]=y'(x)^2
\end{aligned}
$$

を得る．よって，$(*)$ の第一式は

$$\frac{d}{dx}\left\{y'(x)^2\right\}=0$$

となる．このまま両辺を不定積分すると

$$y'(x)^2=c_1 \quad (\ c_1 \text{ は任意の定数})$$

を得る．よって $y'(x)=\pm\sqrt{c_1}$ となるが，これを改めて

$$y'(x)=c_1 \quad (\ c_1 \text{ は任意の実数})$$

とおき直す．再度，両辺を不定積分すると

$$y(x)=c_1x+c_2 \quad (\ c_1, c_2 \text{ は任意の定数})$$

を得る．ここで，$y(0)=1, y(1)=2$ より $\begin{cases} c_2=1 \\ c_1+c_2=2 \end{cases}$ となる．これを解くと $c_1=c_2=1$ となるので，停留関数は $y(x)=x+1$ となる．

［練習問題］ **4.** 1. 変分問題の停留関数を求めよ．

(1). 最小化　$F(y):=\displaystyle\int_0^1\left\{2xy(x)+y'(x)^2\right\}dx$
　　制約　$y(0)=1,\ y(1)=0$

(2). 最小化　$F(y):=\displaystyle\int_0^1\{-2e^x y(x)+y'(x)^2\}\,dx$
　　制約　$y(0)=0,\ y(1)=0$

(3). 最小化　$F(y)=\displaystyle\int_0^1(1+x^2)y'(x)^2\,dx$
　　制約　$y(0)=1,\ y(1)=0$

(4). 最小化　$F(y):=\displaystyle\int_0^1\{y(x)+\sqrt{1+y'(x)^2}\}dx$
　　制約　$y(0)=-1,\ y(1)=0$

第2章　制約つき変分問題

2.1　制約つき変分問題

1.2 節で扱った固定端変分問題は，制約が簡単であったが，以下のようにより難しい制約を持つ変分問題も多い．

［例］ **2.1.** 例 1.2 で挙げた懸垂線問題は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & F(y) := \int_a^b mgy(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \\ \text{制約} \quad & G(y) := \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell \\ & y(a) = h, \quad y(b) = h \end{aligned}$$

となる．制約には端点制約の他に積分で表される制約も含まれている．

この章では，積分制約のついた以下のような問題を扱う：

$$\begin{aligned} \text{最小化}\ F(y) &:= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\ \text{制約}\ G(y) &:= \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx = \ell \\ y(a) &= A,\ y(b) = B \end{aligned} \tag{2.1}$$

この形の問題を本書では，制約つき変分問題 と呼ぶ．

この問題では，関数 $\bar{y}(x)$ が

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx = \ell, \quad y(a) = A,\ y(b) = B$$

を満たし，制約を満たし $\bar{y}(x)$ に近いすべての関数 $y(x)$ に対して

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

を満たすとき，$\bar{y}(x)$ が問題 (2.1) の局所最小解である．

2.1.1　最適性条件の考察

オイラー方程式が使えない？

まず，具体的な問題で考えよう．

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化}\ F(y) := \int_0^1 y'(x)^2\,dx \\
&\text{制約}\ \int_0^1 y(x)\,dx = 1, \quad y(0)=0,\ y(1)=1
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

後ほど例 2.4, 2.11 で示すが，この問題の大域最小解は $\bar{y}(x) = -3x^2 + 4x$ である．ここで固定端問題をまねて，関数 $\bar{y}(x)$ がオイラー方程式

$$
\frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)]
$$

を満たしているか調べよう．目的汎関数の被積分関数は $f(x,y,z) = z^2$ であり，

$$
\begin{aligned}
&f_y(x,y,z) = 0,\ f_z(x,y,z) = 2z \\
&f_y\big[y(x)\big] = 0, \quad f_z\big[y(x)\big] = 2y'(x)
\end{aligned}
$$

を得る．よって，

$$
\frac{d}{dx} f_z[\bar{y}(x)] - f_y[\bar{y}(x)] = \frac{d}{dx}\left\{2\bar{y}'(x)\right\} - 0 = -12
$$

となるので，$\bar{y}(x)$ はオイラー方程式を満たさないことがわかる．したがって，この問題ではオイラー方程式の解を求めても最小解の候補は得られない．

定理 1.21 の証明をまねる

それでは，どのような式なら満たすのだろうか？説明のため，目的汎関数のみ一般的にした次の問題を考える：

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化}\ F(y) := \int_0^1 f[y(x)]\,dx \\
&\text{制約}\ \int_0^1 y(x)\,dx = 1, \quad y(0)=0,\ y(1)=1
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

この問題の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とおく．すると

$$
F(y) \ge F(\bar{y}) \qquad \left(\textstyle\int_0^1 y(x)\,dx = 1,\ y(0)=0,\ y(1)=1 \text{ を満たし } \bar{y}(x) \text{ に近い } y(x) \right)
$$

が成り立つ．いま，$\bar{y}(x)$ は制約を満たすので，関数 $v(x)$ に対して

$$
\int_0^1 \left\{\bar{y}(x) + v(x)\right\}\,dx = 1 \iff \int_0^1 v(x)\,dx = 0
$$

となる．ここで，$v(x)$ を

$$\int_0^1 v(x)\,dx = 0,\ v(0) = 0,\ v(1) = 0$$

を満たす任意の関数とする．それに対して，ε を十分小さな数とすれば $\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)$ は，制約を満たし $\bar{y}(x)$ に近い関数である．よって

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y}) \quad \text{（十分小さい } \varepsilon\text{）}$$

が成り立つ．ここで，定理 1.21 の証明と同様に議論すると

$$DF(\bar{y})(v) = 0$$
$$\text{（ } \textstyle\int_0^1 v(x)\,dx = 0,\ v(0) = 0,\ v(1) = 0 \text{ を満たすすべての } v(x) \text{ ）}$$

を得る．

似て非なる式

よって，方向微分の第 2 公式（補題 1.17）を用いると

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \right] v(x)\,dx = 0$$
$$\text{（ } \textstyle\int_0^1 v(x)\,dx = 0,\ v(0) = 0,\ v(1) = 0 \text{ を満たすすべての } v(x) \text{ ）} \tag{2.4}$$

を得る．定理 1.21 の証明内の式 (1.15) とそっくりだが，$v(x)$ に積分制約が加わっている．

いま，

$$h(x) := f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\}$$

とおくと，式 (2.4) が成り立つには $h(x)$ はどのような条件を満たせば良いだろうか？ここで，$\int_0^1 v(x)\,dx = 0$ より，試みに実数 λ に対して

$$h(x) = \lambda \quad \text{（定数関数）} \tag{2.5}$$

と仮定すると，式 (2.4) が成り立つことがわかる．特に，定理 1.21 の証明と異なり，$\lambda \neq 0$ でも良い．

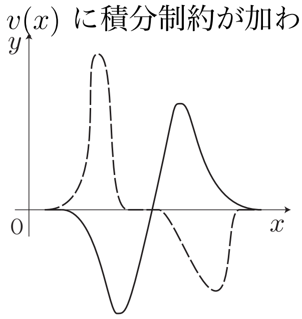


図 2.1: 関数 $v(x)$ の例．このような関数にかけて，積分値が 0 になるものは？

実際，これを背理法で示そう．式 (2.4) が成り立つにも関わらず，$h(x)$ が定数関数でないと仮定する．すると，$h(p) \neq h(q)$ となる 2 点 p, q が存在する．このとき，p に近い点 x_1, q に近い点 x_2 に対しても，$h(x_1) \neq h(x_2)$ となる．

ここで，$v_0(x)$ を図 2.2 のような関数とすると，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 h(x)v_0(x)\,dx \neq 0,\\
&\int_0^1 v_0(x)\,dx = 0,\\
&v_0(0) = v_0(1) = 0
\end{aligned}
$$

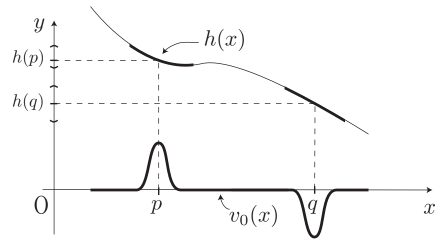


図 2.2: 点 p と q の近くにおいて $v_0(x)$ の積分値は，絶対値が等しく，符号が逆になる．それ以外の点で $v_0(x)$ の値は 0 である．

となるので，(2.4) に矛盾する．よって，$h(x)$ は定数関数となる．

したがって，この問題では，局所最小解に対してオイラー方程式の両辺の差が 0 とは限らない定数となる．

実験的考察

次に，もう少し複雑な制約式を持つ以下の問題に対して，実験的にオイラー方程式の両辺の差を推測してみよう．

$$
\begin{aligned}
\text{最小化 } F(y) &:= \int_0^1 f[y(x)]\,dx\\
\text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 \left\{20y(x) + e^{2x}y'(x)\right\}\,dx = 1, \quad y(0)=0,\ y(1)=1
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とする．

まず，$v(x)$ を $v(0)=v(1)=0$ を満たす任意の関数とする．いま

$$
\begin{aligned}
G(y+v) &= \int_0^1 \left[20\left\{y(x)+v(x)\right\} + e^{2x}\left\{y'(x)+v'(x)\right\}\right]\,dx = 1\\
&\Longleftrightarrow \int_0^1 \left\{20v(x) + e^{2x}v'(x)\right\}\,dx = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，第 2 項を部分積分すると

$$
0 = \int_0^1 \left\{20v(x) + e^{2x}v'(x)\right\}\,dx = \int_0^1 \left(20 - 2e^{2x}\right) v(x)\,dx
$$

となる．

オイラー方程式の両辺の差が関数

さて，この問題も上の議論と同様に

$$
\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\}\right] v(x)\,dx = 0
$$

（ $\int_0^1 (20-2e^{2x})\,v(x)\,dx = 0,\ v(0)=0,\ v(1)=0$ を満たすすべての $v(x)$ ）

が成り立つ．ここで，以前と $v(x)$ の積分制約が異なることに注意する．さらに，この式を

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\}\right]\left(20-2e^{2x}\right)^{-1}\left\{\left(20-2e^{2x}\right)v(x)\right\}dx = 0 \qquad (2.7)$$

と変形する．ここで

$$h(x) := \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\}\right]\left(20-2e^{2x}\right)^{-1}$$

とおき，式 (2.4) から式 (2.5) を示した議論を $h(x)$ と $(20-2e^{2x})\,v(x)$ に適用すると，ある実数 λ に対して

$$h(x) = \lambda \quad \text{（定数関数）}$$

を得る．よって，今度は局所最小解 $\bar{y}(x)$ に対して，オイラー方程式の両辺の差が

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\} = \lambda\left(20-2e^{2x}\right) \qquad (2.8)$$

と，関数になっている．ここで，

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\} = \text{（定数）} \times \text{（制約式から得られる関数）}$$

にという関係に注意しておこう．

2.1.2　制約つき変分問題の最適性条件

一般の制約式の場合

以上のことを一般化すると，制約式が

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx$$

のとき，局所最小解 $\bar{y}(x)$ に対するオイラー方程式の両辺の差は，ある実数 λ に対して

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\} = \lambda\Big[g_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{g_z[\bar{y}(x)]\right\}\Big] \qquad (2.9)$$

となることが示せる．この式を次のように整理すると使いやすい．$\frac{d}{dx}$ のある項を左辺に，$\frac{d}{dx}$ のない項を右辺に移項し，λ を $-\lambda$ に置き換えると

$$\frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\} + \lambda\frac{d}{dx}\left\{g_z[\bar{y}(x)]\right\} = f_y[\bar{y}(x)] + \lambda g_y[\bar{y}(x)]$$

となる．これより以下の定理を得る．

［定理］ **2.2.** 制約つき変分問題

$$\begin{aligned} &\text{最小化}\ F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ &\text{制約}\ G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell \\ &y(a) = A,\ y(b) = B \end{aligned} \tag{2.10}$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき，$DG(\bar{y})(\cdot)$ が正則ならば，ある実数 λ が存在して

$$\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

に対して，$\bar{y}(x)$ は

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tilde{f}_z[\bar{y}(x)] = \tilde{f}_y[\bar{y}(x)] \\ \int_a^b g[\bar{y}(x)]\, dx = \ell \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B \end{cases}$$

を満たす．

制約つき変分問題の停留関数

［定義］ **2.3.** 定理 2.2 で用いた

$$\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

を ラグランジュ関数 と呼ぶ．

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \\ \int_a^b g[y(x)]\, dx = \ell \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を，問題 (2.10) における停留関数と呼ぶ．省略しても誤解がない場合には，単に停留関数と呼ぶ．また，上記の式

$$\frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)] + \lambda g_z[\bar{y}(x)]\right\} = f_y[\bar{y}(x)] + \lambda g_y[\bar{y}(x)]$$

を オイラー–ラグランジュ方程式 と呼ぶ．これはラグランジュ関数 $\tilde{f} = f + \lambda g$ に対するオイラー方程式になっている．

ラグランジュ乗数法との比較

関数 $\bar{y}(x)$ が 問題 (2.10) の局所最小解のとき，式 (2.9) が成り立ち，方向微分の第 2 公式（補題 1.17）より

$$DF(\bar{y})(v) = \lambda DG(\bar{y})(v) \quad (\ v(a) = v(b) = 0 \text{ を満たす関数 } v(x)\ )$$

を得る．これは数ベクトル上の制約付き最適化問題の最適性条件とそっくりである．定理 2.2 は，いわば「制約付き変分問題に対するラグランジュ乗数法」である．

2.1.3 解法例

［例］ **2.4.** 制約付き変分問題

$$\begin{aligned}\text{最小化 } F(y) &:= \int_0^1 y'(x)^2\,dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 y(x)\,dx = 1 \\ y(0) &= 0,\ y(1) = 1\end{aligned}$$

停留関数を求めよ．

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \\ \int_0^1 g[y(x)]\,dx = 1 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 1 \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を求めればよい．まず，汎関数 F，G の被積分関数は，それぞれ $f(x,y,z) = z^2, \quad g(x,y,z) = y$ となる．ここで，実数 λ に対してラグランジュ関数は $\tilde{f}(x,y,z) = z^2 + \lambda y$ となり，

$$\begin{aligned}&\tilde{f}_y = \lambda, \quad \tilde{f}_z = 2z, \\ &\tilde{f}_y\big[y(x)\big] = \lambda, \quad \tilde{f}_z\big[y(x)\big] = 2y'(x)\end{aligned}$$

を得る．よって，オイラー–ラグランジュ方程式（ $(*)$ 第一式）は

$$\frac{d}{dx}\{2y'(x)\} = \lambda$$

となる．両辺を積分すると

$$y'(x) = \frac{\lambda}{2}x + c_1 \quad (\ c_1 \text{ は任意定数})$$

を得て，さらに両辺を積分すると

$$y(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x + c_2 \quad (\ c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

となる．ここで，端点条件 $y(0)=0,\ y(1)=1$ より

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ \dfrac{1}{4}\lambda + c_1 = 1 \end{cases}$$

を得る．さらに停留関数は積分制約を満たす必要があるので，

$$\int_0^1 y(x)\,dx = \int_0^1 \left\{ \frac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x + c_2 \right\} dx = \frac{1}{12}\lambda + \frac{1}{2}c_1$$

より，$\dfrac{1}{12}\lambda + \dfrac{1}{2}c_1 = 1$ を得る．連立方程式を解くことにより，$\lambda = -12, c_1 = 4$ を得る．よって，問題の停留関数は $y(x) = -3x^2 + 4x$ である．

［練習問題］ **5.** 変分問題の停留関数を求めよ．

(1). 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^1 \left\{ y(x) + \frac{1}{4}y'(x)^2 \right\} dx$

制約 $G(y) := \displaystyle\int_0^1 y(x)\,dx = 2$

$y(0) = 1,\ y(1) = 0$

(2). 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^1 y'(x)^2\,dx$

制約 $G(y) := \displaystyle\int_0^1 xy'(x)\,dx = 5$

$y(0) = 1,\ y(1) = 10$

(3). 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^1 2y(x)\,dx$

制約 $G(y) := \displaystyle\int_0^1 y'(x)^2\,dx = 1$

$y(0) = 0,\ y(1) = 0$

2.1.4　凸性を用いた最適性十分条件

特に汎関数に凸性の仮定をすると大域最適解の十分条件が求まる．

［定理］ **2.5.** 制約付き変分問題

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &:= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\ \text{制約 } G(y) &:= \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx = \ell \\ y(a) &= A,\ y(b) = B \end{aligned} \tag{2.11}$$

において，ある実数 λ と関数 $\bar{y}(x)$ が存在して，次の (1)，(2) が成り立つとする：

(1). $F + \lambda G$ が凸汎関数である．

(2). $\tilde{f} = f + \lambda g$ に対して，関数 $\bar{y}(x)$ が $(*)$ $\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{\tilde{f}_z[\bar{y}(x)]\} = \tilde{f}_y[\bar{y}(x)] \\ \int_a^b g[\bar{y}(x)]\,dx = \ell \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B \end{cases}$ を満たす．

このとき，関数 $\bar{y}(x)$ は (2.11) の大域最小解である．

証明. $\bar{y}(x)$ が問題 (2.11) の大域最小解であることを示すには，

$$\begin{aligned} &F(y) \geq F(\bar{y}) \\ &\qquad\qquad \left(\textstyle\int_a^b g[y(x)]\,dx = \ell,\ y(a) = A,\ y(b) = B \text{ を満たすすべての関数 } y(x) \right) \end{aligned}$$

を示せば良い．これは $\bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B$ より

$$\begin{aligned} &F(\bar{y}+v) \geq F(\bar{y}) \\ &\qquad \left(\textstyle\int_a^b g[\bar{y}(x)+v(x)]\,dx = \ell,\ v(a) = 0,\ v(b) = 0 \text{ を満たすすべての関数 } v(x) \right) \end{aligned}$$

と同値である．そこで後者を示す．

まず，関数 $\bar{y}(x)$ を $(*)$ の解とし，$v(x)$ を

$$\int_a^b g[\bar{y}(x)+v(x)]dx = \ell, \quad v(a) = v(b) = 0$$

を満たす任意の関数とする．いま，汎関数 $\tilde{F}$ を

$$\tilde{F}(y) := F(y) + \lambda G(y) = \int_a^b \tilde{f}[y(x)]\,dx$$

とおくと，$\tilde{F}$ は凸汎関数となるので，

$$\tilde{F}(\bar{y}+v) \geq \tilde{F}(\bar{y}) + D\tilde{F}(\bar{y})(v)$$

が成り立つ．ここで，方向微分の第 2 公式 より，

$$\begin{aligned} &D\tilde{F}(\bar{y})(v) \\ &\qquad = \int_a^b \left[\tilde{f}_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ \tilde{f}_z[\bar{y}(x)] \right\} \right] v(x)\,dx + \Big[\tilde{f}_z[\bar{y}(x)]v(x) \Big]_a^b = 0 \end{aligned}$$

となるので，

$$\tilde{F}(\bar{y}+y) \geq \tilde{F}(\bar{y})$$

が成り立つ．これは

$$F(\bar{y}+v) + \lambda G(\bar{y}+v) \geq F(\bar{y}) + \lambda G(\bar{y})$$

を表す．さらに，関数 $v(x)$ の選び方から

$$G(\bar{y}+v) = G(\bar{y}) = \ell$$

なので，この λ 倍を両辺から引くと

$$F(\bar{y}+v) \geq F(\bar{y})$$

を得る．したがって，$\bar{y}(x)$ は大域最小解である． □

2.1.5　線形汎関数

いつ $F+\lambda G$ は凸汎関数になるか？

ここで，汎関数 $F+\lambda G$ が凸汎関数になるための条件について考えよう．まず，以下は自明である．

［命題］ **2.6.** 汎関数 F, G が凸汎関数であり，λ が正のとき，$F+\lambda G$ は凸汎関数である．

しかし，この命題は λ が負の時は使えないので，λ の符号に関係のない条件を探したい．いま，制約付き変分問題

$$\begin{gathered}
\text{最小化 } F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\
\text{制約 } G(y) := \int_a^b y(x)\,dx = \ell \\
y(a) = A,\ y(b) = B
\end{gathered}$$

で，目的汎関数 F が凸汎関数であるとする．すると

$$F(y+v) \geq F(y) + DF(y)(v)$$

が成り立つ．一方，汎関数 G の方向微分は

$$DG(y)(v) = \int_a^b v(x)\,dx$$

であるので

$$\begin{aligned}
G(y+v) &= \int_a^b \big\{y(x)+v(x)\big\}\,dx = \int_a^b y(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx \\
&= G(y) + DG(y)(v)
\end{aligned}$$

となる．よって，任意の実数 λ に対して $\tilde{F} = F + \lambda G$ とおくと

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(y+v) &= F(y+v) + \lambda G(y+v) \\
&\geq F(y) + \lambda G(y) + DF(y)(v) + \lambda DG(y)(v) \qquad (2.12)\\
&= \tilde{F}(y) + D\tilde{F}(y)(v)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは，任意の実数 λ に対して $F+\lambda G$ が凸汎関数であることを表す．

線形汎関数

一般に以下が成り立つ．まず言葉を用意する．

［定義］ **2.7.** 汎関数 $G(y)$ に対して

$$G(\alpha y+\beta v)=\alpha G(y)+\beta G(v)\quad（任意の実数\ \alpha,\beta\ と\ 関数\ y(x),v(x)）$$

が成り立つとき，G を 線形汎関数 と呼ぶ．

［命題］ **2.8.** F を凸汎関数，G を線形汎関数とすると，任意の実数 λ に対して $F+\lambda G$ は凸汎関数になる．

証明. G の方向微分を計算する．まず G は線形汎関数なので

$$\frac{G(y+\varepsilon v)-G(y)}{\varepsilon}=\frac{G(y)+\varepsilon G(v)-G(y)}{\varepsilon}=G(v)$$

となる．これより

$$DG(y)(v)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{G(y+\varepsilon v)-G(y)}{\varepsilon}=G(v)$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}G(y+v)&=G(y)+G(v)\\&=G(y)+DG(y)(v)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，命題の F と G に対して，式 (2.12) が成り立つ．したがって，$F+\lambda G$ は凸汎関数になる．　□

ここで，線形汎関数の例を挙げる．

［例］ **2.9.** (1). 汎関数が

$$G(y)=\int_0^1 3y'(x)\,dx$$

のとき，G は線形汎関数である．実際に

$$\begin{aligned}G(\alpha y+\beta v)&=\int_0^1 3\{\alpha y'(x)+\beta v'(x)\}\,dx\\&=\alpha\int_0^1 3y'(x)\,dx+\beta\int_0^1 3v'(x)\,dx\\&=\alpha G(y)+\beta G(v)\end{aligned}$$

が成り立つ．

(2). 汎関数が

$$G(y)=\int_0^1\left\{10y(x)+e^{2x}y'(x)\right\}dx$$

のとき，G は線形汎関数である．実際に

$$\begin{aligned}G(\alpha y+\beta v)&=\int_0^1\left[10\{\alpha y(x)+\beta v(x)\}+e^{2x}\{\alpha y'(x)+\beta v'(x)\}\right]dx\\&=\int_0^1\left\{10\alpha y(x)+e^{2x}\alpha y'(x)+10\beta v(x)+e^{2x}\beta v'(x)\right\}dx\\&=\alpha\int_0^1\left\{10y(x)+e^{2x}y'(x)\right\}dx+\beta\int_0^1\left\{10v(x)+e^{2x}v'(x)\right\}dx\\&=\alpha G(y)+\beta G(v)\end{aligned}$$

が成り立つ．

以上の凸汎関数の判定法より，定理 2.5 の系を得る．

［系］ **2.10.** 制約付き変分問題

$$\begin{gathered}\text{最小化 } F(y):=\int_a^b f(x,y(x),y'(x))\,dx\\ \text{制約 } G(y):=\int_a^b g(x,y(x),y'(x))\,dx=\ell\\ y(a)=A,\ y(b)=B\end{gathered}$$

において，F を凸汎関数，G を線形汎関数とする．このとき，停留関数 $\bar{y}(x)$：
ある実数 λ と $\tilde{f}=f+\lambda g$ に対して，

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left\{\tilde{f}_z[\bar{y}(x)]\right\}=\tilde{f}_y[\bar{y}(x)]\\ \int_a^b g[\bar{y}(x)]\,dx=\ell\\ \bar{y}(a)=A,\ \bar{y}(b)=B\end{cases}$$

を満たす関数，は大域最小解である．

［例］ **2.11.** 例 2.4 の問題をもう一度見てみよう．

$$\begin{gathered}\text{最小化 } F(y):=\int_0^1 y'(x)^2\,dx\\ \text{制約 } G(y):=\int_0^1 y(x)\,dx=1\\ y(0)=y(1)=0\end{gathered}$$

この問題の目的汎関数 F は凸汎関数で，制約式の G は線形汎関数である．よって，系 2.10 より，停留関数 $y(x)=-3x^2+4x$ は大域最小解になる．

［練習問題］ **6.** 変分問題の停留関数を求めよ．

(1). 最小化 $F(y) := \int_0^{\pi} \{2y(x)\sin x + y'(x)^2\}dx$

制約 $G(y) := \int_0^{\pi} y(x)dx = 1$

$y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

(2). 最小化 $F(y) := \int_0^{1} \{4y(x) + y'(x)^2\}\,dx$

制約 $G(y) := \int_0^{1} xy(x)\,dx = \frac{1}{4}$

$y(0) = 0,\ y(1) = -1$

(3). 最小化 $F(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(x)^2\,dx$

制約 $G(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(x)\sin x\,dx = \frac{7}{8}\pi^2$

$y(0) = \pi/2,\ y(\pi/2) = \pi^3/2$

2.2 有名な変分問題の解

一般に，自然に現れる変分問題の解析解を求めるのは難しいことが多い．しかし，解法は技巧的にはなるが，解析解を求められる有名な問題があるのでそれらを見ていこう．

2.2.1 最速降下線

最速降下線の問題（ 1.1 節の例 1.1 ）

$$\text{最小化 } F(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}dx$$
$$y(0) = 0, y(a) = A$$

の停留関数を求める．

いま，

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(0) = 0,\ y(a) = A \end{cases}$$

を満たす関数を求める．まず，目的汎関数の被積分関数は，x 変数を含まない関数

$$f(y,z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{2gy}}$$

である．

$$f_y = -\sqrt{\frac{1+z^2}{8gy^3}}, \quad f_z = \frac{z}{\sqrt{2gy(1+z^2)}} \tag{2.13}$$

となるので，オイラー方程式は

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}}\right\} = -\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{8gy(x)^3}}$$

となる．これはとても複雑な式である．しかし，被積分関数が x 変数を含まないことに注目すると，以下のように左辺の $\frac{d}{dx}$ を外す方法がある．

$f(y,z)$ 型の被積分関数に対するオイラー方程式

［補題］ **2.12.** x 変数を含まない関数 $f(y,z)$ に対して，オイラー方程式

$$\frac{d}{dx}f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

は，以下のように変形できる：

$$y'(x)f_z[y(x)] - f[y(x)] = c_1 \quad (\ c_1 \text{ は定数})$$

証明. まず，オイラー方程式に $y'(x)$ を掛けると

$$y'(x)\frac{d}{dx}f_z[y(x)] - y'(x)f_y[y(x)] = 0$$

となる．この式を積分定数を c_1 として不定積分し，部分積分を用いると

$$\begin{aligned} c_1 &= \int y'(x)\frac{d}{dx}f_z[y(x)]\,dx - \int y'(x)f_y[y(x)]\,dx \\ &= y'(x)f_z[y(x)] - \int y''(x)f_z[y(x)]\,dx - \int y'(x)f_y[y(x)]\,dx \\ &= y'(x)f_z[y(x)] - \int \Big\{y''(x)f_z[y(x)] + y'(x)f_y[y(x)]\Big\}\,dx \end{aligned} \tag{2.14}$$

を得る．ここで，(2.14) の最後の式の不定積分は $f[y(x)]$ となる．実際，$f(y,z)$ は変数に x を持たないので，合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f[y(x)] &= \frac{d}{dx}f(y(x), y'(x)) \\ &= f_y[y(x)]y'(x) + f_z[y(x)]y''(x) \end{aligned}$$

となるからである．したがって

$$y'(x)f_z[y(x)] - f[y(x)] = c_1 \quad (\ c_1 \text{ は定数})$$

が成り立つ □

この補題を用いると，式 (2.13) より

$$
\begin{aligned}
c_1 &= y'(x)\left\{\frac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}}\right\} - \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}}
\end{aligned}
$$

を得る．この式の両辺を自乗して $y'(x)$ について解くと，

$$
y'(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1}
$$

を得る．いま，$y'(x)$ が負でない解を探したいので，

$$
y'(x) = \sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1} \tag{2.15}
$$

を解く．実はこの式は，変数分離型という微分方程式に分類され，うまく解くことができる．これより，停留関数 $y(x)$ は θ によるパラメータ表示で

$$
\begin{cases}
x = \frac{1}{4gc_1^2}(\theta - \sin\theta) + c_2 \\
y = \frac{1}{4gc_1^2}(1 - \cos\theta)
\end{cases}
$$

と書けることがわかる．条件 $y(0) = 0, y(a) = A$ より定数 c_1, c_2 を決め，改めて $\frac{1}{4gc_1^2} = c$ とおくと，

$$
\begin{cases}
x = c(\theta - \sin\theta) \\
y = c(1 - \cos\theta)
\end{cases}
$$

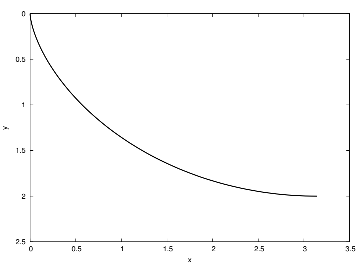


図 2.3: 最速降下線: サイクロイド $x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$

を得る．したがって，停留関数はサイクロイドであることが分かる．

別の議論により，最小解であることが示されるので，最速降下線はサイクロイドである．

変数分離型の微分方程式の解法

微分方程式 (2.15) を解いてみよう．式を見やすくするため，定数を $2gc_1^2 = a$ とおくと

$$
\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-ay(x)}{ay(x)}} \tag{2.16}
$$

となる．いま 1 変数関数 h を

$$
h(y) = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}}
$$

すると，$\frac{dy}{dx} = h(y(x))$ と書けることに注意する．ここで　$\frac{1}{h(y)}$ の不定積分を

$$I(y) = \int \sqrt{\frac{ay}{1-ay}}\,dy$$

とおく．すると，合成関数の微分公式と式 (2.16) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big\{I(y(x))\big\} &= \frac{dI}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= \sqrt{\frac{ay(x)}{1-ay(x)}}\frac{dy}{dx} = 1\end{aligned}$$

となるので，両辺を x で不定積分して

$$I(y(x)) = x + c_2 \quad (c_2 \text{ は積分定数}) \tag{2.17}$$

を得る．ここで $I(y)$ を求める．

いま，I は無理関数の不定積分なので

$$t = \sqrt{\frac{ay}{1-ay}}$$

と変数変換すると，

$$y = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \tag{2.18}$$

となり，

$$I = \int \frac{2t^2}{a(1+t^2)^2}\,dt$$

を得る．さらに，これは有理関数の不定積分なので

$$t = \tan\frac{\theta}{2}$$

と変換すると

$$I = \frac{1}{2a}(\theta - \sin\theta) + c_2'$$

となるので，式 (2.17) より

$$x = \frac{1}{2a}(\theta - \sin\theta) + c_2$$

を得る．

ところで，y と θ の関係は 式 (2.18) より

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{a}\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2a}(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

である．よって定数 a を $a = 2gc_1^2$ と元に戻すと

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4gc_1^2}(\theta - \sin\theta) + c_2 \\ y = \frac{1}{4gc_1^2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

を得る．

2.2.2　懸垂線

懸垂線の問題（ 2.1 節の例 1.2 ）

$$\begin{aligned} \text{最小化 } F(y) &= \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx \\ G(y) &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = l \\ y(a) &= h,\ y(b) = h \end{aligned}$$

の停留関数を求める．

汎関数 F と G の被積分関数はそれぞれ，x 変数を含まない関数

$$f(y,z) = y\sqrt{1+z^2}, \quad g(y,z) = \sqrt{1+z^2}$$

となり，実数 λ に対してラグランジュ関数は

$$\tilde{f}(y,z) = y\sqrt{1+z^2} + \lambda\sqrt{1+z^2}$$

となる．ここで，ラグランジュ関数も x 変数を含まないので，補題 **??** よりオイラー–ラグランジュ方程式は

$$y'(x)\tilde{f}_z[y(x)] - \tilde{f}[y(x)] = c \text{ (c は定数)} \tag{2.19}$$

となる．いま

$$\tilde{f}_z(y,z) = \frac{yz + \lambda z}{\sqrt{1+z^2}}$$

より，これを式 (2.19) に代入すると

$$\begin{aligned} c &= y'(x)\left\{\frac{y(x)y'(x) + \lambda y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right\} - \left\{y(x)\sqrt{1+y'(x)^2} + \lambda\sqrt{1+y'(x)^2}\right\} \\ &= \frac{-(y(x)+\lambda)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \end{aligned}$$

となるので，$y'(x)$ について整理すると

$$y'(x) = \pm\sqrt{\left\{\frac{y(x)+\lambda}{c}\right\}^2 - 1}$$

を得る．ここで，$u(x) = \frac{y(x)+\lambda}{c}$ とおくと

$$cu'(x) = \pm\sqrt{u(x)^2 - 1}$$

は変数分離形の微分方程式である．これを解くと，解は

$$\log\left|u(x) + \sqrt{u(x)^2-1}\right| = \pm\frac{x+d}{c} \quad (\ d \text{ は定数})$$

を満たす．よって，

$$u(x) + \sqrt{u(x)^2-1} = \exp\left\{\pm\frac{x+d}{c}\right\}$$

となり，これを u について解くと，

$$u(x) = \frac{e^{\pm\frac{x+d}{c}} + e^{\mp\frac{x+d}{c}}}{2}$$

を得る．$u(x) = \frac{y(x)+\lambda}{c}$ を代入すると，どちらの符号をとっても

$$y(x) = c\cosh\left(\frac{x+d}{c}\right) - \lambda$$

が成り立つことが分かる．定数 c, d, λ は制約条件を満たすように決めれば良い．

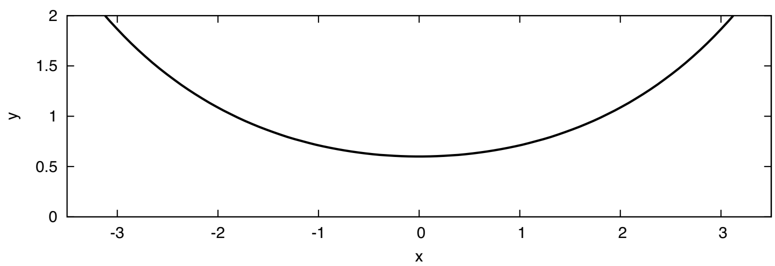


図 2.4: 懸垂線

まとめ

固定端問題

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{最小化}\ F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\ &\quad\text{制約}\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases} \boxed{\text{オイラー方程式}}$$

を満たす関数 $y(x)$ を求める

制約付き変分問題

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{最小化}\ F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\ &\quad\text{制約}\ G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx = \ell \\ &\qquad\qquad y(a) = A,\ y(b) = B \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{f_z[y(x)] + \lambda g_z[y(x)]\} = f_y[y(x)] + \lambda g_y[y(x)] \\ \int_a^b g[y(x)]\,dx = \ell \qquad \boxed{\text{オイラー–ラグランジュ方程式}} \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ と実数 λ を求める

汎関数に凸性があると大域最適解が求まることも！