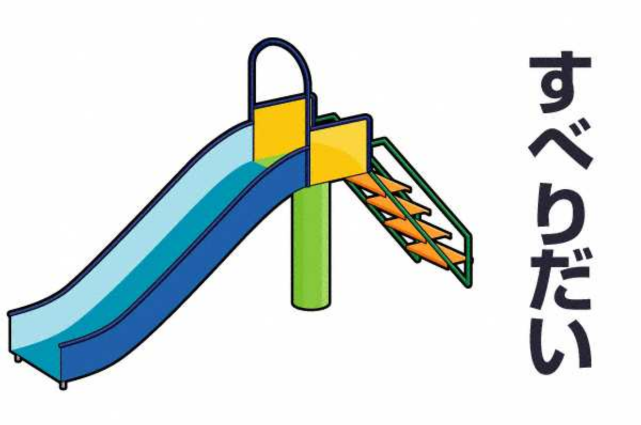
最適化数学 第 11 回

[今回の項目]

1. 変分問題の例
2. 最小解の定義
3. 汎関数
4. 方向微分

最速滑り台

どのような形の滑り台が最も早く滑れるか？ただし到達点は指定されている (真っ直ぐ降りるのではない)



出典: 情報処理推進機構

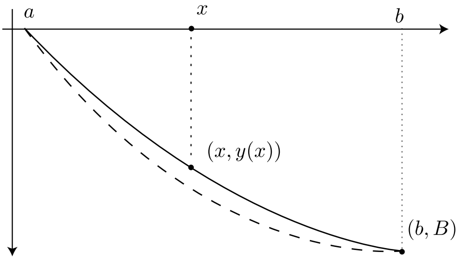
変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで滑り台の形を表す．重力による加速度を g とおくと, 高さ y のときの速度 v は, エネルギー保存則より $mv^2/2 = mgy$ を満たすので $v = \sqrt{2gy}$ となる．

よって, 移動時間は

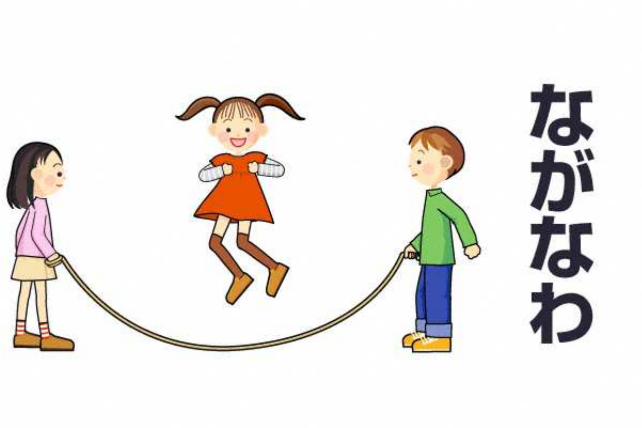
$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx$$

となる．この積分値を最小にする関数 $y(x)$ のグラフが最速滑り台の形を表す．



長縄のかたち

二人の人が, 地面につかないように長縄を持ったとき, 長縄はどのような形で垂れ下がるか？



出典: 情報処理推進機構

制約付き変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで縄の形を表す. 縄の両端の高さを h, 長さを l, 密度を m とする. 両端の座標を (a,h), (b,h) とする. 縄は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$\int_a^b \left(m\sqrt{1+y'(x)^2}gy(x) \right) dx$$

を, 長さ

$$\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell$$

両端 $y(a)=y(b)=h$ という条件のもとで最小にする関数 $y(x)$ を見つければよい.

簡単な変分問題

$$\text{最小化} \quad F(y) = \int_0^1 \{y(x) - 1\}^2 \, dx$$

$$\text{制　約} \quad \text{なし}$$

汎関数 F に具体的な関数を代入して，値を計算する．

$$y_1(x) = x \text{ のときは } F(y_1) = \int_0^1 \{x - 1\}^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

$$y_2(x) = x^2 \text{ のときは } F(y_2) = \int_0^1 \{x^2 - 1\}^2 \, dx = \frac{8}{15}$$

よって，F の値を比べると

$$F(y_2) > F(y_1)$$

となる．それでは，

$F(y)$ の値を一番小さくするのはどのような関数 $y(x)$ か？

発見的に最小解を見つける

$$\text{最小化} \quad F(y) = \int_0^1 \{y(x) - 1\}^2 \, dx$$

$$\text{制　約} \quad \text{なし}$$

さて，この問題に関しては推測で解を見つけることができる．ここで，鍵となるのが積分に関する以下の性質である：

$$\text{区間 } [a, b] \text{ で } f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$$

これより，汎関数 F の値はすべての関数 $y(x)$ に対して 0 以上となる．そこで，F の値を 0 にするような $y(x)$ を探す．いま $\bar{y}(x) = 1$（定数関数）とおくと，$F(\bar{y}) = 0$ なので，すべての $y(x)$ に対して

$$F(y) = \int_0^1 \{y(x) - 1\}^2 \, dx \geq 0 = F(\bar{y})$$

が成り立つ．したがって，$\bar{y}(x) = 1$ は最小解となる．

関数の微分に依存する汎関数

変分問題に慣れるために，次の問題も推測で解いてみよう．

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad F(y) = \int_1^2 \left\{ y'(x) - 1 \right\}^2 dx \\ &\text{制　約} \quad y(1) = 2,\ y(2) = 3 \end{aligned}$$

さて，この汎関数 F も，すべての $y(x)$ に対して 0 以上となる．

まず，F の値を 0 にするには，明らかに

$$y'(x) = 1$$

となればよい．また，制約より

$$y(1) = 2,\, y(2) = 3$$

も必要である．

この二つを満たす関数を探すと

$$\bar{y}(x) = x + 1.$$

$y(1) = 2$，$y(2) = 3$ を満たすすべての関数 $y(x)$ に対して，$\bar{y}(x) = x + 1$ は最小解となる．

変分問題の一般形

変分問題の一般形は，汎関数 $F(y)$ を用いて

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & F(y) \\ \text{制　約} & y \in C \end{array} \tag{1}$$

のように書ける．ここで，$F(y)$ を 目的汎関数 と呼ぶ．また，$y \in C$ とは，関数 $y(x)$ が関数の集合 C に入っていることを表す．

Definition

関数 $\bar{y}(x) \in C$ がすべての関数 $y(x) \in C$ に対して $F(y) \geq F(\bar{y})$ を満たすとき，$\bar{y}(x)$ を問題 (1) の 大域最小解 と呼ぶ．

Definition

関数 $\bar{y}(x) \in C$ が $\bar{y}(x)$ に十分「近い」すべての関数 $y(x) \in C$ に対して $F(y) \geq F(\bar{y})$ を満たすとき，$\bar{y}(x)$ を問題 (1) の 局所最小解 と呼ぶ．

関数の近さ

関数 $\bar{y}(x)$ に「近い」関数とは,$y(x)$ とグラフが近い関数のことを指す．例えば,関数 $v(x)$ と十分小さい数 ε に対して

$$\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)$$

という関数を考えると，この関数のグラフは $\bar{y}(x)$ のグラフが少し変化したものになっているので，$\bar{y}(x)$ に「近い」関数である（図 1）.

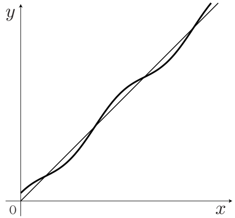


Figure : 細い線が $y(x) = x$，太い線が $y(x) = x + 0.04\ \cos(4\pi x)$ のグラフ

制約を満たし「近い」関数

さらに制約

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1 \qquad (2)$$

を考える．いま $\bar{y}(x)$ は，
制約を満たすとする．このとき，制約 (2) を満たし，関数 $\bar{y}(x)$ に「近い」関数とはどのようなものだろうか？この場合は

$$v(0) = 0,\ v(1) = 0$$

を満たす $v(x)$ と十分小さい数 ε に対して

$$\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)$$

とすればよい．すると，

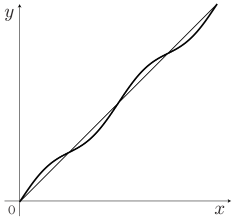


Figure : 細い線が $y(x) = x$，太い線が $y(x) = x+0.04\sin(4\pi x)$ のグラフ．端が一致していることに注意

$$\bar{y}(0) + \varepsilon v(0) = 0, \quad \bar{y}(1) + \varepsilon v(1) = 1$$

となるので，関数 $\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)$ は，制約 (2) を満たし，グラフが $\bar{y}(x)$ に「近い」関数である（図 2）．

被積分関数

本講義では，3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対して，

$$F(y) = \int_a^b f\left(x, y(x), y'(x)\right)\, dx$$

と定義される汎関数を扱う．この $f(x,y,z)$ を 被積分関数 と呼ぶ．
被積分関数とは単に「積分される関数」という意味だが，本講義では汎関数の定義に使われるこの $f(x,y,z)$ を指す言葉として使う．

Example

$\int_0^1 \{y(x)-1\}^2\, dx$ の被積分関数は

$$f(x,y,z) = (y-1)^2$$

である．

Example

$\int_a^b \left\{y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2\right\} dx$ の被積分関数は

$$f(x,y,z) = y + \frac{1}{2}z^2$$

である．

［練習問題］

以下の汎関数の被積分関数 $f(x, y, z)$ を求めよ.

$$(1)\ F(y) = \int_0^1 \left\{ xy(x) + y'(x)^3 \right\} dx$$

$$(2)\ G(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

被積分関数の省略記号

汎関数を表すときなどに，常に $f(x, y(x), y'(x))$ と書くと表記が煩雑になるので，関数の括弧に "$\left[\quad\right]$" を用いて

$$f(x, y(x), y'(x)) = f\left[y(x)\right]$$

と表すことにする．右辺には y' が書かれていないが, x と関数 $y(x)$ が決まれば $y'(x)$ も決まるので, このように省略をしても差し支えない. この省略記号を使うと

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx = \int_a^b f[y(x)]\,dx$$

とすっきり書ける.

汎関数の微分

推測で解を見つけられる問題は非常に特殊な問題に限られる．数ベクトル上の最適化問題と同様に，変分問題でも汎関数の微分を用いて，最適解を見つける一般的な方法がある．
1 変数関数の場合，微分係数とは変数を少し変化させたときに関数値が変化する割合（瞬間変化率）を指した．汎関数の微分も，

関数を少し変化させたときに汎関数値が変化する割合
（瞬間変化率）

のようなもので定義したい．

汎関数値の変化量

$$F(y) = \int_0^1 y(x)^2\,dx$$

を考える．関数 $y(x)$ を「少し変化させる」とは，関数 $v(x)$ と小さい数 ε に対して，

$$y(x) \to y(x) + \varepsilon v(x)$$

とすることを指すことする．このとき，汎関数 $F(x)$ の値がどのように変化するかを調べてみよう．いま，汎関数値の変化量は

$$F(y+\varepsilon v) - F(y)$$

となる．

例： $y(x) = x^2, \quad v(x) = x^3$ に対して，

$$y(x) = x^2 \to y(x) + \varepsilon v(x) = x^2 + \varepsilon x^3$$

とすると，

$$\begin{aligned} & F(y+\varepsilon v) - F(y) \\ &= \int_0^1 \left(x^2+\varepsilon x^3\right)^2 dx - \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + 2\varepsilon x^5 + \varepsilon^2 x^6 - x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{7}\varepsilon^2 \end{aligned}$$

を得る．これが汎関数値の変化量である．

汎関数値の擬似的な変化率

次に，この関数の変化に対する汎関数値の平均変化率 $\dfrac{(\text{汎関数 } F \text{ の変化量})}{(\text{関数 } y(x) \text{ の変化量})}$ を調べたい．しかし，実は汎関数に対して平均変化率そのものを定義するのは難しい．
そこで，ε の変化量のみを考慮した疑似的な平均変化率

$$\frac{(\text{汎関数 } F \text{ の } v \text{ 方向の変化量})}{(\varepsilon \text{ の変化量})} = \frac{F(y+\varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\varepsilon$$

を使用する．これを「v 方向の平均変化率」と呼ぼう．さらに，$\varepsilon \to 0$ と極限をとると

$$(\ v \text{ 方向の瞬間変化率}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(y+\varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} = \frac{1}{3}$$

が得られる．これを用いて，一般の汎関数の微分を定義する．

方向微分

Definition

汎関数 F と関数 $y(x)$, $v(x)$ に対して,

$$F(y)(v) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(y + \varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon}$$

を y における v に対する 方向微分 と呼ぶ.

Example

$F(y) = \int_0^1 y(x)^2\, dx$ の方向微分を求める．

$$
\begin{aligned}
F(y+\varepsilon v) - F(y) &= \int_0^1 \{y(x) + \varepsilon v(x)\}^2\ dx - \int_0^1 \{y(x)\}^2\ dx \\
&= \int_0^1 \left\{y(x)^2 + 2\varepsilon v(x)y(x) + \varepsilon^2 v(x)^2 - y(x)^2\right\}\ dx \\
&= \int_0^1 \left\{2\varepsilon v(x)y(x) + \varepsilon^2 v(x)^2\right\}\ dx \\
&= 2\varepsilon \int_0^1 v(x)y(x)\, dx + \varepsilon^2 \int_0^1 v(x)^2\, dx
\end{aligned}
$$

となる．これより「v 方向の平均変化率」を求めると，

$\dfrac{F(y+\varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} = 2\displaystyle\int_0^1 v(x)y(x)\, dx + \varepsilon \int_0^1 v(x)^2\, dx$ となる．

よって，$\varepsilon \to 0$ とすると，$DF(y)(v) = 2\displaystyle\int_0^1 v(x)y(x)\, dx$ を得る．

方向微分の公式

上記のように定義から直接求める方法もあるが，方向微分には次の便利な公式がある．

［命題］

汎関数 $F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$ に対して，方向微分は

$$DF(y)(v) = \int_a^b \{f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)\}\ dx$$

と表せる．ここで，f_y は第 2 変数，f_z は第 3 変数に関する偏微分を表す．

ただし，

$$f_y[y(x)] = f_y(x, y(x), y'(x)) \quad f_z[y(x)] = f_z(x, y(x), y'(x)).$$

方向微分の例

Example

1. 汎関数が $F(y)=\displaystyle\int_0^1 y(x)^2\,dx$ のとき，被積分関数は $f(x,y,z)=y^2$ となる．$f_y=2y$，$f_z=0$ なので，方向微分は

$$DF(y)(v)=\int_0^1 2y(x)v(x)\,dx.$$

2. 汎関数が $F(y)=\displaystyle\int_0^1\left\{y(x)+\frac{1}{2}y'(x)^2\right\}dx$ のとき，被積分関数は $f(x,y,z)=y+\frac{1}{2}z^2$ となる．$f_y=1$，$f_z=z$ なので，方向微分は

$$\begin{aligned}DF(y)(v)&=\int_0^1\left\{f_y[y(x)]v(x)+f_z[y(x)]v'(x)\right\}dx\\&=\int_0^1\left\{v(x)+y'(x)v'(x)\right\}dx.\end{aligned}$$

[練習問題]

以下の汎関数の被積分関数 $f(x,y,z)$ を書き，関数 $y(x)$ における $v(x)$ に対する方向微分を求めよ．

$$(1)\ F(y) = \int_0^1 \left\{2y(x)\sin x + y'(x)^2\right\} dx$$

$$(2)\ G(y) = \int_0^1 \left\{y(x) + \sqrt{1+y'(x)^2}\right\} dx$$