最適化数学 第 12 回

[今回の項目]

1. 凸汎関数
2. オイラー–ラグランジュ方程式

凸汎関数

数ベクトルの最小化問題を考えるとき，凸関数 が重要な役割を果たした．$\mathbb{R}^n$ の凸関数は次の性質を持っている；

f が凸関数である

$\Leftrightarrow$ 任意の $u, v \in \mathbb{R}^n$ ついて $f(v) \geq f(u) + \nabla f(u)(v-u)$

$\Leftrightarrow$ 任意の u についてヘッセ行列 $\nabla^2 f(u)$ が半正定値

ここでは，汎関数の凸性について考える．

凸汎関数の定義

Definition

F を汎関数とする．任意の関数 $y(x), v(x)$ に対して

$$F(y+v) \geq F(y) + DF(y)(v)$$

が成り立つとき，F を **凸汎関数** と呼ぶ.

Example

$F(y) = \displaystyle\int_0^1 y(x)^2\,dx$ は凸汎関数である．実際,

$$\begin{aligned} F(y+v) - F(y) &= 2\int_0^1 v(x)y(x)\,dx + \int_0^1 v(x)^2\,dx \\ &\geq 2\int_0^1 v(x)y(x)\,dx = DF(y)(v) \end{aligned}$$

となる.

汎関数が凸になる条件

次に，一般的な凸性の判定法を紹介する．まず言葉を用意する．

Definition

3 変数関数 $f(x, y, z)$ に対して，x を定数と見なし，(y, z) の関数を

$$g(y, z) = f(x, y, z)$$

とおく．すべての x に対して $g(y, z)$ が凸関数であるとき，$f(x, y, z)$ は 第 2，第 3 変数に関して凸 であるという．

[命題]

3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対して,

$f(x,y,z)$ が第 2, 第 3 変数に関して凸

$\Longleftrightarrow$ 任意の x,y,z に対して $\begin{bmatrix} f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix}$ が半正定値

[定理]

汎関数を $F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y(x),y'(x))dx$ とする. 任意の $x\in[a,b]$ に対して, 被積分関数 $f(x,y,z)$ が第 2, 第 3 変数に関して凸ならば, 汎関数 F も凸である.

凸汎関数の例

Example

1. $F(y) = \int_a^b \left\{x + y(x)^2 + y'(x)^2\right\} dx$
   被積分関数 $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$ は凸関数なので F は凸汎関数である．
2. $F(y) = \int_a^b \left\{-x^2 + y(x)^2 + y'(x)^2\right\} dx$
   被積分関数 $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$ は (x, y, z) に関しては凸ではないが，x を定数とみなすと，第 2, 第 3 変数に関しては凸である．したがって，F は凸汎関数である．

変分問題の最適性条件

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ &\text{制　約} \quad y(a) = A, y(b) = B \end{aligned}$$

この問題には最適解の候補となる関数 y に対して，
$y(a) = A, y(b) = B$ という制約がついているので，**固定端問題** と呼ばれる．

以下，議論がやさしい順に

1. 凸汎関数の大域最適解の十分条件
2. 汎関数の局所最適解の必要条件

という順番で説明する．

方向微分の第 2 公式

Lemma (方向微分の第 2 公式)

汎関数 $F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$ に対して，方向微分は以下となる；

$$DF(y)(v) = \int_a^b \left[f_y[y(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[y(x)]\} \right] v(x)\, dx + \Big[f_z[y(x)] v(x) \Big]_a^b.$$

[証明] .

方向微分の公式に部分積分を用いると

$$\begin{aligned} DF(y)(v) &= \int_a^b \{ f_y[y(x)] v(x) + f_z[y(x)] v'(x) \}\, dx \\ &= \int_a^b f_y[y(x)] v(x)\, dx + \Big[f_z[y(x)] v(x) \Big]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\{f_z[y(x)]\}\, v(x)\, dx \\ &= \int_a^b \left[f_y[y(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[y(x)]\} \right] v(x)\, dx + \Big[f_z[y(x)] v(x) \Big]_a^b. \end{aligned}$$

□

凸汎関数に対する最適性十分条件

［定理］

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\text{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ &\text{制 約} \quad y(a) = A, y(b) = B \end{aligned}$$

において，目的汎関数 F が凸汎関数であるとする．関数 $\bar{y}(x)$ が

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(a) = A, \;\; y(b) = B \end{cases}$$

の解ならば，$\bar{y}(x)$ は問題 $(*)$ の大域最小解である．

定理の証明

$\bar{y}(x)$ が問題 (3) の大域最小解であることを示すには,

$$F(y) \geq F(\bar{y}) \quad (\ y(a) = A, y(b) = B \text{ を満たすすべての関数 } y(x)\ )$$

を示せばよい． これは，$\bar{y}(a) = A, \bar{y}(b) = B$ なので,
$v(x) = y(x) - \bar{y}(x)$ とおくことにより

$$F(\bar{y} + v) \geq F(\bar{y}) \quad (\ v(a) = v(b) = 0 \text{ を満たすすべての関数 } v(x)\ )$$

と同値である．以下で後者を示す.

定理の証明の続き

関数 $\bar{y}(x)$ を $(*)$ $\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$ の解とし，$v(x)$ を $v(a) = v(b) = 0$ を満たす任意の関数とする．ここで，方向微分の第 2 公式を用いると

$$\begin{aligned} & DF(\bar{y})(v) \\ &= \int_a^b \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx} \{ f_z[\bar{y}(x)] \} \right] v(x)\, dx + \Big[f_z[\bar{y}(x)] v(x) \Big]_a^b = 0 \end{aligned}$$

となる．いま，目的関数 F が凸なので，定義より，

$$F(y + v) \geq F(\bar{y}) + DF(\bar{y})(v) = F(\bar{y})$$

が成り立つ．よって $\bar{y}$ は (P) の大域最小解になる．

オイラー–ラグランジュ方程式と停留関数

Definition

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を，停留関数 と呼ぶ．また，上記の式

$$\frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

を オイラー–ラグランジュ方程式 と呼ぶ．

一般の汎関数に対する最適性必要条件

次に，一般の汎関数に対して局所最適解の必要条件を挙げる．

［定理］

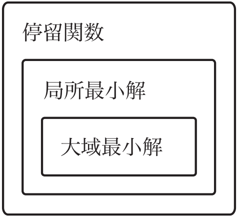
$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & F(y) := \displaystyle\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\
\text{制　約} & y(a) = A,\ y(b) = B
\end{array}
$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $\bar{y}(x)$ は，以下を満たす：

$$
(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[\bar{y}(x)] = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B. \end{cases}
$$

停留関数と最小解の関係

変分問題においても停留関数と最小解は下図のようになり，停留関数であっても最小解でない関数が存在する．



しかし，目的汎関数が凸のときはすべて一致する．

［系］

変分問題 (4) において，目的汎関数 F を凸汎関数とする．すると，局所最小解はすべて大域最小解になり，

$$\bar{y}(x) \text{ が大域最小解} \iff \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A, \bar{y}(b) = B \end{cases}$$

が成り立つ．

解法例

板書

練習問題

[練習問題]

変分問題の停留関数を求めよ.

$$(1)\ \text{最小化}\ F(y) = \int_0^1 \{4e^x y(x) + y'(x)^2\}\, dx$$

$$y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$$

$$(2)\ \text{最小化}\ F(y) := \int_0^1 \{(y'(x) - x)^2 + 2xy(x)\}\, dx$$

$$y(0) = 0, y(1) = 5/3$$