

最適化数学 第 14 回

[今回の項目]

- 1 有名な変分問題の解

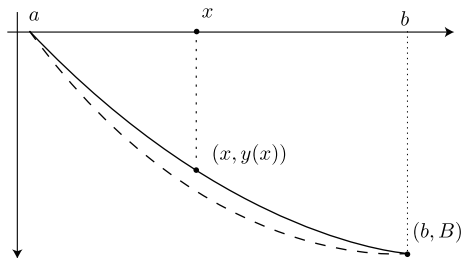
最速降下線

関数 $y(x)$ のグラフで滑り台の形を表す. 重力による加速度を g とおくと, 高さ y のときの速度 v は, エネルギー保存則より $mv^2/2 = mgy$ を満たすので $v = \sqrt{2gy}$ となる.

よって, 移動時間は

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx$$

となる. この積分値を最小にする関数 $y(x)$ のグラフが最速滑り台の形を表す.



解法

$$\text{最小化 } F(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} dx$$

$$\text{制約 } y(0) = 0, y(a) = A$$

の停留関数を求める。いま,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(0) = 0, y(a) = A \end{cases}$$

を満たす関数を求める。まず、目的汎関数の被積分関数は、 x 変数を含まない関数

$$f(y, z) = \sqrt{\frac{1 + z^2}{2gy}}$$

である。

オイラー方程式は

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} \right\} = -\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{8gy(x)^3}}$$

となる。被積分関数が x 変数を含まないことに注目し、左辺の $\frac{d}{dx}$ を外す。

Lemma

x 変数を含まない関数 $f(y, z)$ に対して、オイラー方程式

$$\frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

は、以下のように変形できる：

$$y'(x) f_z[y(x)] - f[y(x)] = c \quad (c \text{ は定数})$$

補題を用いると,

$$\frac{-1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} = c_1$$

を得る. この式の両辺を自乗して $y'(x)$ について解くと,

$$y'(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1}$$

を得る. いま, $y'(x)$ が負でない解を探したいので,

$$y'(x) = \sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1} \quad (1)$$

を解く. 実はこの式は, 変数分離型という微分方程式に分類され, うまく解くことができる.

最速降下線

微分方程式の解の定数を置き直して整理すると,

$$\begin{cases} x = c(\theta - \sin \theta) \\ y = c(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

を得る. したがって, 停留関数はサイクロイドであることがわかる.

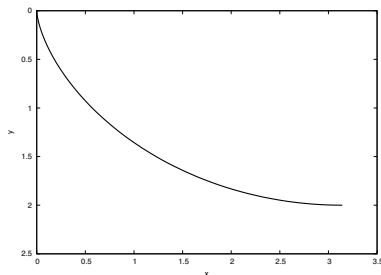


Figure: 最速降下線: サイクロイド
 $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$

制約付き変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで縄の形を表す. 縄の両端の高さを h , 長さを l , 密度を m とする. 両端の座標を (a, h) , (b, h) とする. 縄は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$\int_a^b \left(m \sqrt{1 + y'(x)^2} g y(x) \right) dx$$

を, 長さ

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = l$$

両端 $y(a) = y(b) = h$ という条件のもとで最小にする関数 $y(x)$ を見つければよい.

$$\text{最小化 } F(y) = \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = l$$

$$y(a) = h, y(b) = h$$

の停留関数を求める。

汎関数 F と G の被積分関数はそれぞれ、 x 変数を含まない関数

$$f(y, z) = y\sqrt{1 + z^2}, \quad g(y, z) = \sqrt{1 + z^2}$$

となり、実数 λ に対してラグランジュ関数は

$$\tilde{f}(y, z) = y\sqrt{1 + z^2} + \lambda\sqrt{1 + z^2}$$

となる。ここで、ラグランジュ関数も x 変数を含まないので、補題より、オイラー-ラグランジュ方程式は

$$y'(x)\tilde{f}_z[y(x)] - \tilde{f}[y(x)] = c \quad (c \text{ は定数})$$

となる。

いま,

$$\tilde{f}_z(y, z) = \frac{yz + \lambda z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

より, これをオイラー-ラグランジュ方程式に代入すると

$$\frac{-(y(x) + \lambda)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = c$$

となるので, $y'(x)$ について整理すると

$$y'(x) = \pm \sqrt{\left\{ \frac{y(x) + \lambda}{c} \right\}^2 - 1}$$

を得る. ここで, $u(x) = \frac{y(x) + \lambda}{c}$ とおくと

$$cu'(x) = \pm \sqrt{u(x)^2 - 1}$$

は変数分離形の微分方程式である.

微分方程式を解いて、 $u(x)$ を $y(x)$ に戻すと、

$$y(x) = c \cosh\left(\frac{x+d}{c}\right) - \lambda$$

となることが分かる。定数 c, d, λ は制約条件を満たすように決めればよい。

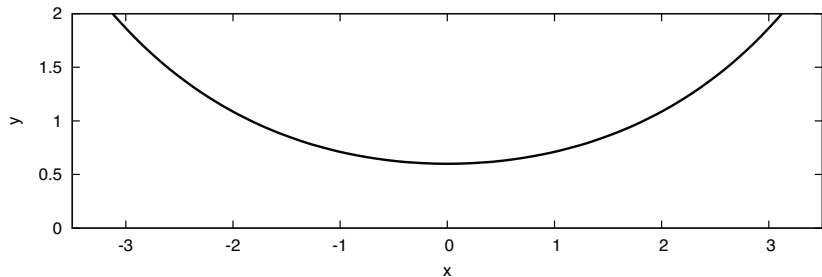


Figure: 懸垂線