

# 最適化数学 第3回

## [今回の項目]

- ① 制約なし最適化問題
- ② 1 次の最適性条件
- ③ 停留点と局所最適解
- ④ 2 次の最適性条件
- ⑤ 局所最適解の求め方

# 最適化問題とは？

## 問題

平面に4点  $(1, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 7)$  が与えられたとき、これらの点の最も近くを通る直線は？

直線は  $y = ax + b$  と書け、点  $(1, 3)$  と直線との誤差は

$$3 - (1 \cdot a + b)$$

となる。同様に他の点との誤差を考え、それらの二乗の和を最小にする問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{最小化 } f(a, b) &= \{3 - (a + b)\}^2 + \{5 - (2a + b)\}^2 \\ &\quad + \{5 - (3a + b)\}^2 + \{7 - (4a + b)\}^2 \end{aligned}$$

制約 なし

# 制約なし最適化問題

最小化  $f(x)$

制約 なし

ここで、最小化する関数  $f(x)$  を 目的関数 と呼ぶ。

関数を最大化する問題を最大化問題と呼び、最小化問題と最大化問題をまとめて、最適化問題 と呼ぶ。

# 最適解の定義

## [定義]

$\bar{x}$  がすべての  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$f(x) \geq f(\bar{x})$$

のとき  $f(\bar{x})$  を 大域最小値,  $\bar{x}$  を大域最小解と呼ぶ.

## [定義]

$\bar{x}$  に 十分近い すべての  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して

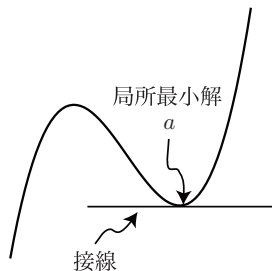
$$f(x) \geq f(\bar{x})$$

のとき  $f(\bar{x})$  を 局所最小値,  $\bar{x}$  を局所最小解と呼ぶ.

不等号が逆だと最大解. 最小・最大解をまとめて最適解と呼ぶ  
微積で扱う極値との違いは教科書参照.

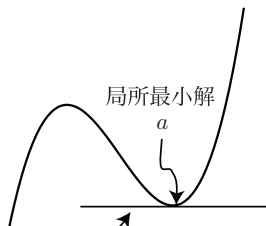
# 1 次最適性条件

$f(x)$  が 1 変数関数のとき,  
点  $a$  が局所最適解ならば,  
 $f'(a) = 0$  が成り立つ.



# 1 次 の 最 適 性 条 件

$f(x)$  が 1 変数関数のとき、  
点  $a$  が局所最適解ならば、  
 $f'(a) = 0$  が成り立つ。



## [定理] (一次の最適性条件)

$f(x)$  : 多変数関数  
点  $\bar{x}$  が局所最適解ならば、

$$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{零ベクトル})$$

が成り立つ。

## [定義]

点  $p$  が、 $\nabla f(p) = \mathbf{0}$  を満たすとき、 $p$  を  $f$  の停留点と呼ぶ。

# 停留点は最適解？

## 【定理】（一次の最適性条件）

$f(x)$ ：多変数関数

点  $\bar{x}$  が局所最適解ならば、

$$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{零ベクトル})$$

が成り立つ。

【解説】．局所最適解が存在すれば、定理より、それは常に停留点になる．よって、停留点をすべて見つければ最適解は必ずその中にある．このことから、停留点を見つけることは重要なのである．

停留点

局所最小解

大域最小解

# 停留点の幾何的イメージ

最小化  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$   
の局所最小解を  $(x, y) = (a, b)$  とする.

点  $(a, b)$  は局所最小解であるので,

「点  $(a, b, f(a, b))$  はグラフ  
が下に窪んだ部分の一番底に位置している」



「窪みの一番底に接する平面は水平」

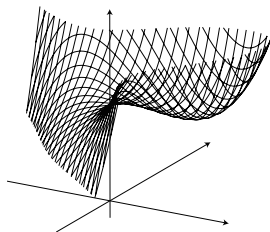


接平面  $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$  は  $(x, y)$  に対して、一定の値を取る.



$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

証明は教科書を参照.





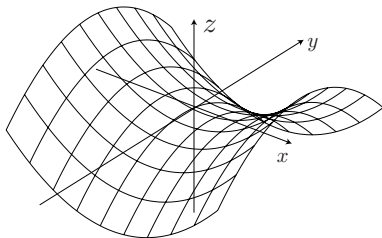
# 練習問題

# 停留点であっても，局所最適解とは限らない

[例]

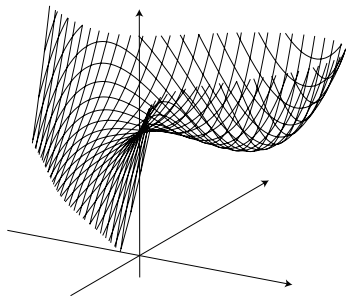
$$\text{最小化 } f(x, y) = x^2 - y^2$$

では  $\nabla f(0, 0) = \mathbf{0}$  となるが， $(0, 0)$  は局所最小解ではない．実際， $f(0, 0)$  と，点  $(0, 0)$  に近い点  $(x, y)$  での  $f$  の値を比べても， $f(0, 0)$  は最も小さい値にはなっていない．

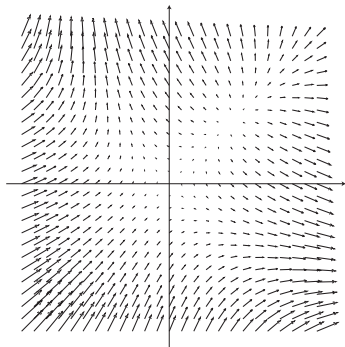


# どの停留点が局所最適解？

$$\text{最小化 } f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$



$x^3 - 3xy + y^3$  のグラフ



$x^3 - 3xy + y^3$  の勾配ベクトル

# ヘッセ行列を用いた判定法

停留点  $\bar{x}$  を局所最小解とすると,

$\bar{x}$  で『グラフは局所的に下に窪んでいる』

↔ 点  $\bar{x}$  の近くで関数  $f$  は『局所的に凸関数である』

# ヘッセ行列を用いた判定法

停留点  $\bar{x}$  を局所最小解とすると,

$\bar{x}$  で『グラフは局所的に下に窪んでいる』

↔ 点  $\bar{x}$  の近くで関数  $f$  は『局所的に凸関数である』

## [定理] (2次の最適性条件)

- ① (必要性)  $\bar{x}$  が局所最小解  
⇒  $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$  かつ  $\nabla^2 f(\bar{x})$  が半正定値
- ② (十分性)  $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$  かつ  $\nabla^2 f(\bar{x})$  が正定値  
⇒  $\bar{x}$  は局所最小解.
- ③ (否定)  $\nabla^2 f(\bar{x})$  が不定値のとき,  $\bar{x}$  は局所最適解ではない.

局所最大解についても, それぞれ対応する箇所を半負定値, 負定値, 極大値に置き換えたものが成り立つ.

## 2 次の最適性条件の幾何的イメージ

[凸関数の復習]

任意の  $(x, y)$  について  $\nabla^2 f(x, y)$  が正定値  $\implies f$  が狭義凸関数

[2 次の最適性条件]

$\nabla^2 f(a, b)$  が正定値

$\implies (a, b)$  に近い  $(x, y)$  で  $\nabla^2 f(x, y)$  が正定値

$\implies f$  が「 $(a, b)$  の近くで狭義凸関数」

1 次の最適性条件と合わせると,

$\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$  かつ  $\nabla^2 f(a, b)$  が正定値

$\implies (a, b)$  は  $f$  の「局所的に狭義凸」な部分の底にある

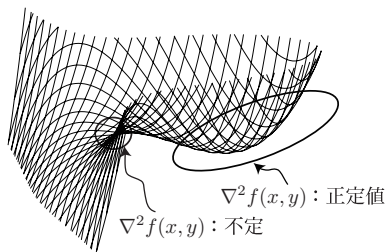
$\implies (a, b)$  は局所最適解

## 2 次の最適性条件の幾何的イメージ

ヘッセ行列  $\nabla^2 f(a, b)$  が不定 ( $|\nabla^2 f(a, b)| < 0$ )

$\implies f$  が  $(a, b)$  の近くで凸関数にも凹関数にならず、  
グラフが捻れている

$\implies (a, b)$  は最適解ではない



# 例題

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

の局所最適値を求めよ.