

最適化数学 自習問題 1 (2015, 担当: 関口 良行)

1. 自習用の問題です. テスト勉強に役立ててください.
2. 答えは教科書に載っています.
3. 試験は手書きの A4 一枚のみ持ち込み可能です (コピーは不可).

制約なし最適化問題

1. 次の関数の停留点を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

$$(2) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 6zy - 2x - 2y + 2z$$

2. 局所最適値 (極値) を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1 \quad (2) f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$$

$$(3) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz - zx + x + y - 2z + 1$$

$$(4) f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x \quad (5) f(x, y) = 2x^4 - 2x^2 + y^2 + 2x^2y$$

制約つき最適化問題

1. 最適化問題の局所最適解を求めよ. また大域最適解が求まるときは求めよ.

$$(1) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = 2x - 3y \\ \text{制約} & g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \quad (2) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = x^3 + y^3 \\ \text{制約} & g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y, z) = x + y + z \\ \text{制約} & g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ & g_2(x, y, z) = x - y + z = 0 \end{array}$$

2. x, y が原点を中心とする半径 1 の円周上の点であるとき, $2x^2 - 6xy + 2y^2$ の最小値と最大値を求めよ.
3. 以下の最小化問題の最小値を求めよ. ただし以下の問題はすべて最小解を持つ.

$$(1) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \\ \text{制約} & g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{array} \quad (2) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = xy \\ \text{制約} & g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{array}$$

4. 以下の最小化問題の KKT 条件を求めよ (解は求めなくてよい).

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x - y + 2z \\ \text{制約} & x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 \leq 0 \\ & 2x + 2y + z - 1 = 0 \end{array}$$