最適化数学 第 13 回

［今回の項目］

1. 変分問題：最適性条件の証明
2. 制約つき変分問題
3. 最適性条件

復習：固定端変分問題

［定理］(一般の汎関数に対する最適性必要条件)

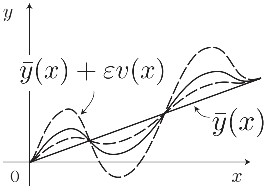
$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\
&\text{制　約} \quad y(a) = A,\ y(b) = B
\end{aligned}
$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $\bar{y}(x)$ は，以下を満たす：

$$
(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[\bar{y}(x)] = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B. \end{cases}
$$

(汎関数が凸とは限らない一般の場合)

証明の概要：固定端変分問題



$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．すると，

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

(制約 $y(a)=A,\ y(b)=B$ を満たし $\bar{y}(x)$ に十分近いすべての $y(x)$)

が成り立つ．

ここで，$v(x)$ を $v(a)=0,\ v(b)=0$ を満たす任意の関数とする．それに対して，ε を十分小さい数とすれば

$$\bar{y}(x)+\varepsilon v(x)$$

は，制約を満たし $\bar{y}(x)$ に近い関数である．よって，

$$F(\bar{y}+\varepsilon v) \geq F(\bar{y}) \quad (\text{十分小さい } \varepsilon\ )$$

が成り立つ．

証明の概要：続き

ここで $\phi(\varepsilon) = F(\bar{y} + \varepsilon v)$ とおくと

$$\phi(\varepsilon) \geq \phi(0) \quad (\text{十分小さい } \varepsilon\ )$$

が成り立つ．いま，$\phi(\varepsilon)$ は 1 変数関数なので，$\varepsilon = 0$ が局所最小解であることから $\phi'(0) = 0$ が成り立つ．方向微分の定義より，これは

$$DF(\bar{y})(v) = 0$$

を表す．方向微分の第 2 公式と $v(a) = v(b) = 0$ より

$$\begin{aligned} 0 = DF(\bar{y})(v) &= \int_a^b \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} \right] v(x)\,dx + \Big[f_z[\bar{y}(x)]v(x) \Big]_a^b \\ &= \int_a^b \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} \right] v(x)\,dx \end{aligned}$$

を得る．

証明の概要：続き

よって

$$\int_a^b \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} \right] v(x)\,dx = 0$$

（ $v(a) = 0, v(b) = 0$ を満たすすべての $v(x)$ ）

が成り立ち，これより，

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)\} = 0 \quad \text{（すべての } x \text{ で } 0 \text{ となる関数）}$$

を得る（オイラー–ラグランジュ方程式）.

制約つき変分問題

固定端変分問題は，制約が簡単であったが，以下のようにより難しい制約を持つ変分問題も多い．

Example

例で挙げた懸垂線問題は

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & F(y) := \int_a^b mgy(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \\
\text{制　約} \quad & G(y) := \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell \\
& y(a) = h, \quad y(b) = h
\end{aligned}
$$

となる．

制約には端点制約の他に積分で表される制約も含まれている．

制約つき変分問題の一般形

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\
&\text{制　約} \quad G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell \\
&\qquad\qquad\; y(a) = A,\; y(b) = B
\end{aligned}
$$

この問題では，関数 $\bar{y}(x)$ が

$$
G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell, \quad y(a) = A,\; y(b) = B
$$

を満たし，$\bar{y}(x)$ に近いすべての関数 $y(x)$ に対して

$$
F(y) \geq F(\bar{y})
$$

となる，$\bar{y}(x)$ が局所最小解である．

制約つき変分問題に対する実験的考察 その一

制約つき変分問題に対して，そのままではオイラー–ラグランジュ方程式は使えない．
まず，最も単純な積分制約から考える．

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad F(y) := \int_0^1 f[y(x)]\,dx \\
&\text{制　約} \quad \int_0^1 y(x)\,dx = 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1
\end{aligned}
$$

この問題の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とおく．すると

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

($\int_0^1 y(x)\,dx = 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$ を満たし $\bar{y}(x)$ に近い $y(x)$)

が成り立つ．

考察その一の続き

$v(x)$ を $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の関数とすると，

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

$\left(\int_0^1 \{\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)\}\, dx = 1,\ v(0) = v(1) = 0 \text{ を満たすすべての関数 } v\right)$

いま，$\bar{y}(x)$ は制約を満たすので，関数 $v(x)$ に対して

$$\int_0^1 \{\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)\}\, dx = 1 \iff \int_0^1 v(x)\, dx = 0$$

となる．よって

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

$\left(\ \int_0^1 v(x)\, dx = 0,\ v(0) = 0,\ v(1) = 0 \text{ を満たすすべての } v(x)\ \right)$

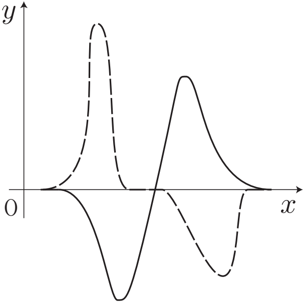
考察その一の続き

したがって，固定端問題の証明と同様にして，

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \right] v(x)\, dx = 0$$

（ $\int_0^1 v(x)\, dx = 0$，$v(0) = 0$，$v(1) = 0$ を満たすすべての $v(x)$ ）

を得る．固定端問題の場合の証明内の式とそっくりだが，$v(x)$ に積分制約が加わっている．



積分が 0 になる関数 $v(x)$ をかけて，積分値が 0 になるものは？

$\Downarrow$

ある λ に対して，

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} = \lambda \quad \text{（定数関数）}$$

制約つき変分問題に対する実験的考察 その二

次に少し複雑な積分制約について考える.

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad F(y) := \int_0^1 f[y(x)]\,dx \\
&\text{制　約} \quad G(y) := \int_0^1 \left\{20y(x) + e^{2x}y'(x)\right\}\,dx = 1 \\
&\qquad\qquad\; y(0) = 0,\ y(1) = 1
\end{aligned}
$$

の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とする．すると,

$$
\begin{aligned}
&F(y) \geq F(\bar{y}) \\
&(G(y) = 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1 \text{ を満たすすべての関数})
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

考察その二の続き

$v(x)$ を $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の関数とすると,

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$
$$(G(\bar{y} + \varepsilon v) = 1,\ v(0) = 0,\ v(1) = 0 \text{ を満たすすべての関数 } v)$$

いま,$G(\bar{y} + v) = \int_0^1 \left[20\left\{\bar{y}(x) + v(x)\right\} + e^{2x}\left\{\bar{y}'(x) + v'(x)\right\}\right] dx = 1$

$$\iff \int_0^1 \left\{20v(x) + e^{2x}v'(x)\right\} dx = 0$$

$$\iff \int_0^1 \left(20 - 2e^{2x}\right) v(x)\, dx = 0 \text{ (部分積分)}$$

より,

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$
$$\left(\int_0^1 \left(20 - 2e^{2x}\right) v(x)\, dx = 0, v(0) = 0,\ v(1) = 0\right.$$
$$\left.\text{を満たすすべての関数 } v\right)$$

考察その二の続き

したがって，

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\}\right] v(x)\, dx = 0$$

$$(\int_0^1 \left(20 - 2e^{2x}\right) v(x)\, dx = 0, v(0) = 0,\ v(1) = 0$$

を満たすすべての関数 v)

が成り立つ．ここで，

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\}\right] \left(20 - 2e^{2x}\right)^{-1} \left(20 - 2e^{2x}\right) v(x)\, dx = 0$$

より，

$$\left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\}\right] (20 - 2e^{2x})^{-1} = \lambda$$

を得る．いま

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\} = (\text{定数}) \times (\text{制約式から得られる関数})$$

になるという関係に注意しておこう．

一般の制約の場合

先程の考察を一般化すると，制約式が

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx$$

のとき，局所最小解 $\bar{y}(x)$ に対するオイラー–ラグランジュ方程式の両辺の差は，ある実数 λ に対して

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} = \lambda\Big[g_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\{g_z[\bar{y}(x)]\}\Big] \quad (1)$$

となることが示せる．$\frac{d}{dx}$ のある項を左辺に，$\frac{d}{dx}$ のない項を右辺に移項し，λ を $-\lambda$ に置き換えると

$$\frac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} + \lambda\frac{d}{dx}\{g_z[\bar{y}(x)]\} = f_y[\bar{y}(x)] + \lambda g_y[\bar{y}(x)]$$

となる．

制約つき変分問題の最適性条件

［定理］

$$\text{最小化}\quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

$$\text{制　約}\quad G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell$$

$$y(a) = A,\ y(b) = B$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $DG(\bar{y})(\cdot)$ が正則ならば，ある実数 λ が存在して，$\tilde{f}(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$ に対して，$\bar{y}(x)$ は

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tilde{f}_z[\bar{y}(x)] = \tilde{f}_y[\bar{y}(x)] \\ \int_a^b g[\bar{y}(x)]\, dx = \ell \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B \end{cases}$$

を満たす．

制約つき変分問題の停留関数

Definition

定理で用いた

$$\tilde{f}(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

を ラグランジュ関数 と呼ぶ.

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \\ \int_a^b g[y(x)]\,dx = \ell \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を, 問題 (2) における 停留関数 と呼ぶ. また, $(*)$ の微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)] + \lambda g_z[\bar{y}(x)]\right\} = f_y[\bar{y}(x)] + \lambda g_y[\bar{y}(x)]$$

も, 単に オイラー–ラグランジュ方程式 と呼ぶ.

解法例

Example

制約付き変分問題

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & F(y) := \int_0^1 y'(x)^2\,dx \\
\text{制　約} \quad & G(y) := \int_0^1 y(x)\,dx = 1 \\
& y(0) = 0,\ y(1) = 1
\end{aligned}
$$

停留関数を求めよ.

板書

練習問題

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \text{最小化} \quad F(y) := \int_0^{\pi} \{2y(x)\sin x + y'(x)^2\} dx \\
&\qquad\ \ \text{制　約} \quad G(y) := \int_0^{\pi} y(x) dx = 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0 \\
&(2) \quad \text{最小化} \quad F(y) := \int_0^{1} \{4y(x) + y'(x)^2\}\, dx \\
&\qquad\ \ \text{制　約} \quad G(y) := \int_0^{1} xy(x)\, dx = \frac{1}{4} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad y(0) = 0,\ y(1) = -1
\end{aligned}
$$