最適化数学 第 14 回

[今回の項目]

1. 有名な変分問題の解

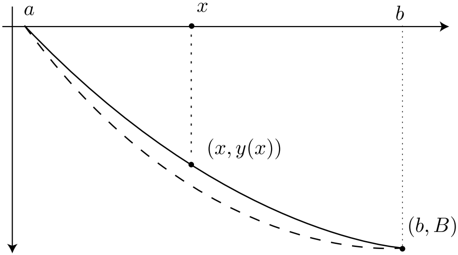
最速降下線

関数 $y(x)$ のグラフで滑り台の形を表す．重力による加速度を g とおくと，高さ y のときの速度 v は，エネルギー保存則より $mv^2/2 = mgy$ を満たすので $v = \sqrt{2gy}$ となる．

よって，移動時間は

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx$$

となる．この積分値を最小にする関数 $y(x)$ のグラフが最速滑り台の形を表す．



解法

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad F(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}dx \\
&\text{制　約} \quad y(0) = 0, y(a) = A
\end{aligned}
$$

の停留関数を求める．まず，目的汎関数の被積分関数は

$$
f(x, y, z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{2gy}}
$$

である．

ここで，被積分関数

$$f(y,z)=\sqrt{\frac{1+z^2}{2gy}}$$

が，x 変数を含まない関数 であることに注意する．いま，オイラー–ラグランジュ方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}f_z[y(x)]=f_y[y(x)] \\ y(0)=0,\ y(a)=A \end{cases}$$

は，

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}}\right\}=-\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{8gy(x)^3}}$$

となる．被積分関数が x 変数を含まないことに注目し，左辺の $\frac{d}{dx}$ を外す．

Lemma

x 変数を含まない関数 $f(y,z)$ に対して，オイラー–ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dx}f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

は，以下のように変形できる：

$$y'(x)f_z[y(x)] - f[y(x)] = c \quad (\ c\ \text{は定数})$$

解説

両辺に $y'(x)$ を掛け，x に関して不定積分する．

$$\int y'(x)\frac{d}{dx}f_z[y(x)]\,dx - \int y'(x)f_y[y(x)]\,dx = c$$

被積分関数 $f(y,z)$ が x 変数に依存していないという性質用いながら，部分積分で変形すると，結論の式を得る．

補題を用いると,

$$\frac{-1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} = c_1$$

を得る．この式の両辺を自乗して $y'(x)$ について解くと,

$$y'(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1}$$

を得る．いま，$y'(x)$ が負でない解を探したいので,

$$y'(x) = \sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1} \tag{1}$$

を解く．実はこの式は，変数分離型という微分方程式に分類され，うまく解くことができる．

最速降下線

微分方程式の解の定数を置き直して整理すると,

$$\begin{cases} x = c(\theta - \sin\theta) \\ y = c(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

を得る．したがって，停留関数はサイクロイドであることがわかる．

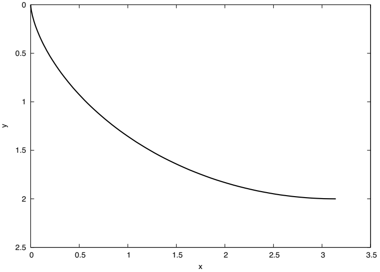


Figure: 最速降下線: サイクロイド $x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$

制約付き変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで縄の形を表す. 縄の両端の高さを h, 長さを l, 密度を m とする. 両端の座標を (a,h), (b,h) とする. 縄は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$\int_a^b \left(m\sqrt{1+y'(x)^2} g y(x) \right) dx$$

を, 長さ

$$\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\, dx = \ell$$

両端 $y(a)=y(b)=h$ という条件のもとで最小にする関数 $y(x)$ を見つければよい.

$$
\begin{aligned}
\text{最小化 } F(y) &= \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \\
G(y) &= \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = l \\
y(a) &= h,\ y(b) = h
\end{aligned}
$$

の停留関数を求める．
汎関数 F と G の被積分関数はそれぞれ，x 変数を含まない関数

$$
f(y,z) = y\sqrt{1+z^2}, \quad g(y,z) = \sqrt{1+z^2}
$$

となり，実数 λ に対してラグランジュ関数は

$$
\tilde{f}(y,z) = y\sqrt{1+z^2} + \lambda\sqrt{1+z^2}
$$

となる．ここで，ラグランジュ関数も x 変数を含まないので，補題より，オイラー–ラグランジュ方程式は

$$
y'(x)\tilde{f}_z[y(x)] - \tilde{f}[y(x)] = c \text{ (c は定数)}
$$

となる．

いま，

$$\tilde{f}_z(y,z) = \frac{yz+\lambda z}{\sqrt{1+z^2}}$$

より，これをオイラー–ラグランジュ方程式に代入すると

$$\frac{-(y(x)+\lambda)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = c$$

となるので，$y'(x)$ について整理すると

$$y'(x) = \pm\sqrt{\left\{\frac{y(x)+\lambda}{c}\right\}^2 - 1}$$

を得る．ここで，$u(x) = \frac{y(x)+\lambda}{c}$ とおくと

$$cu'(x) = \pm\sqrt{u(x)^2 - 1}$$

は変数分離形の微分方程式である．

微分方程式を解いて，$u(x)$ を $y(x)$ に戻すと，

$$y(x) = c\cosh\left(\frac{x+d}{c}\right) - \lambda$$

となることが分かる．定数 c, d, λ は制約条件を満たすように決めればよい．

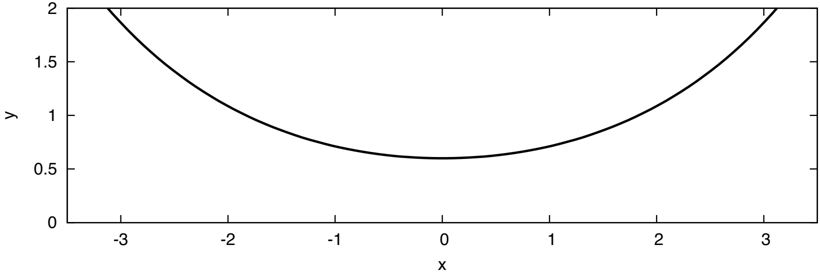


Figure: 懸垂線