

# 最適化数学 第 8 回

## [今回の項目]

- ① 線形計画問題
- ② 単体法

# 線形計画問題

## 線形計画問題

### 最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{制約} & g_1(x) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \leq 0 \end{array}$$

において、目的関数も制約式も 1 次式であるものを 線形計画問題 と呼ぶ。

線形計画問題は 一見特殊な問題に見えるが、大規模な問題でも高速に解けるといいう利点があるので、応用上よく用いられる

# 生産計画

## Example

ある工場で製品 1, 製品 2 を生産する. 製品 1 は原材料 A を 1 kg, 原材料 B を 3 kg 使用し 8 万円 で売れる. また, 製品 2 は原材料 A を 1 kg, 原材料 B を 1 kg 使用し 6 万円 で売れる. 原材料 A が 4 kg, 原材料 B が 6 kg あるとき, 製品 1 と製品 2 をいくつつ作れば利益が最大になるか?

この問題を表にまとめると

	製品 1	製品 2	在庫
原材料 A	1 kg	1 kg	4 kg
原材料 B	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

となる.

# 定式化

	製品 1	製品 2	在庫
原材料A	1 kg	1 kg	4 kg
原材料B	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

製品 1 の個数を  $x_1$ 、製品 2 の個数を  $x_2$  とし、この問題を最適化問題で定式化すると

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & -8x_1 - 6x_2 & \text{(利益)} \\ \text{制約} & x_1 + x_2 \leq 4 & \text{(原材料Aの在庫)} \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 & \text{(原材料Bの在庫)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

となるので、線形計画問題になる。

# Example

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{最小化} \\ & \text{制約} \end{array} \quad \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_1 \quad \quad \quad + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

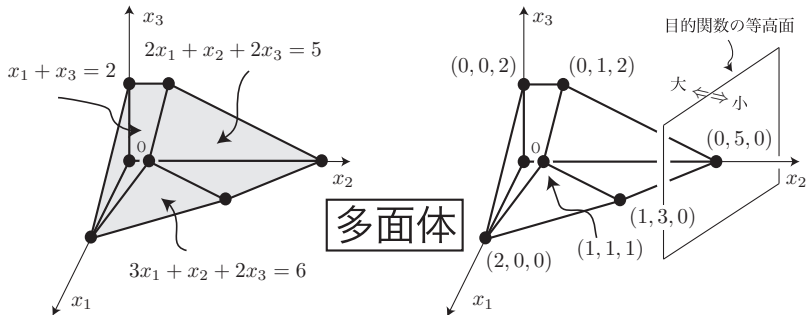
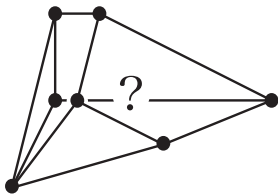


Figure: 実行可能領域と等高面

# 単体法

さて、実行可能解の頂点が未知の場合どのように問題を解いたらよいだろうか？ここでは単体法と呼ばれるアルゴリズムを用いて線形計画問題を解く。



実際には形もわからない

# 1. スラック変数の導入

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{最小化} \\ & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{制約} \\ & x_1 \qquad \qquad \qquad + x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

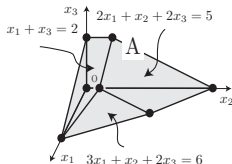
まず、問題 (P) をスラック変数と呼ばれる  $x_4, x_5, x_6$  を導入して次の同値な問題に変形する.

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{制約} & x_1 \qquad \qquad \qquad + x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad \qquad \qquad + x_5 = 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + x_6 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

最小化  
制約

(\*)

$$\begin{aligned}
 -x_1 - 2x_2 - 3x_3 & \\
 x_1 & + x_3 + x_4 = 2 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 & + x_5 = 5 \\
 3x_1 + x_2 + 2x_3 & + x_6 = 6 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0
 \end{aligned}$$



例えば，点 A:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  は (P) の実行可能解である．これは自然に問題 (\*) の実行可能解に拡張される．問題 (\*) の制約式に代入すると，

$$x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1 \text{ となり，点 } A': \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ は問題 (*) の実行可能解に}$$

なる．ここで，問題 (\*) の制約式は  $\begin{cases} x_4 = 2 - (x_1 + x_3) \\ x_5 = 5 - (2x_1 + x_2 + 2x_3) \\ x_6 = 6 - (3x_1 + x_2 + 2x_3) \end{cases}$  と変形できるの

で，点 A' でスラック変数  $x_4 = 0, x_5 = 0$  ということは，点 A は二つの平面

$$x_1 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

の上の点であるということを表している．



## 2. 辞書を作る

スラック変数を導入した問題の制約式でスラック変数  $x_4, x_5, x_6$  を左辺に残し, 残りを右辺へ移項し, 目的関数を  $z$  とおく.

$$\begin{array}{ll} \text{(辞書 1)} & \text{最小化} \\ & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{制約} \\ & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \end{array}$$



$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

左辺に現れる変数  $x_4, x_5, x_6$  を **基底変数**, 右辺に現れる変数  $x_1, x_2, x_3$  を **非基底変数** と呼ぶ. ここで,

**基底変数は, 目的関数の変数に含まれていない**

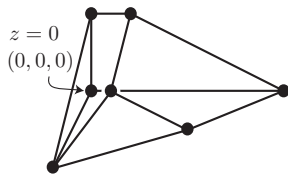
ことに注意しよう. この形を線形計画問題の **辞書** と呼ぶ.

### 3. 実行可能基底解を求める

$$\begin{array}{ll} \text{(辞書 1)} & \text{最小化} \\ & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{制約} \\ & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ & x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

辞書の非基底変数  $x_1, x_2, x_3$  をすべて 0 として得られる実行可能解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \boxed{\quad}$$



を辞書の **実行可能基底解** と呼ぶ。いま、ここでの目的関数値は  $z = 0$  となる。

また、この点は元問題 (P) の実行可能領域の  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (多面体の頂点)

に対応していることに注意してほしい。

## 4. 解の更新

- ❶ 非基底変数の中から、目的関数において係数が負であるものを一つ選び、その値を  $t$ 、その他の非基底変数の値を  $0$  とおく。
- ❷ すべての基底変数が負にならない範囲で、(i) で選んだ非基底変数の値  $t$  を最大まで増やす。

(辞書 1) 最小化

$$z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

制約

$$x_4 = 2 - x_1 - x_3$$

$$x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

まず更新ルール (i) より, 目的関数  $z$  で, 係数が負である非基底変数  $x_3$  を選ぶ. ここで,  $x_3 = t$ , その他の非基底変数  $x_1 = x_2 = 0$  とおくと, 以下を得る:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \boxed{\phantom{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}}$$

次に更新ルール (ii) を満たす  $t$  を求めると,

$$x_4 = 2 - t, x_4 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq t \geq 0$$

$$x_5 = 5 - 2t, x_5 \geq 0 \Rightarrow 5/2 \geq t \geq 0$$

$$x_6 = 6 - 2t, x_6 \geq 0 \Rightarrow 3 \geq t \geq 0$$

なので, どの  $x_4, x_5, x_6$  も負でない最大の  $t$  は  $t = 2$  となる.  
代入すると,

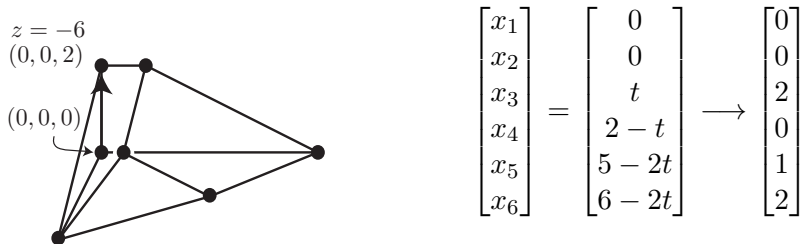
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 2 - t \\ 5 - 2t \\ 6 - 2t \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\phantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 2 - t \\ 5 - 2t \\ 6 - 2t \end{bmatrix}}}$$

となり, 新しい実行可能解が得られる. このとき目的関数値は

$$z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = \boxed{\phantom{-x_1 - 2x_2 - 3x_3}}$$

となり, 確かに目的関数値は減少している.

# 解の更新ルールの図形的意味



- $t = 0$  のときは、点は元の実行可能基底解 (P の  $(0, 0, 0)$ ) と一致する。
- $t$  を大きくしていくと、点は  $x_1 = 0, x_2 = 0$  を保ちながら動くので、多面体の边上 ( $z$  軸上) を移動する。
- $t = 2$  のとき、スラック変数が  $x_4 = 0$  となるので、点は平面  $x_1 + x_2 = 2$  上に位置する。
- このとき、点は新たな頂点  $(0, 0, 2)$  に達しており、ここでは目的関数値は元の頂点における値より小さくなっている。

## 5. 辞書の更新

更新ルールの適用後，元の実行可能基底解と新しい実行可能解

$$\begin{array}{l} \text{(旧)} \\ \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \right] = \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{\phantom{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(新)} \\ \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \right] = \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{\phantom{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}}} \end{array}$$

を比べて，

$$\begin{array}{l} \text{[非基底変数]} \quad x_3 \rightarrow \text{正} \\ \text{[基底変数]} \quad x_4 \rightarrow 0 \end{array}$$

となっていることに注目しよう．次に， $x_3$  と  $x_4$  を入れ換えた新しい辞書を作成する．

まず、辞書 1 で  $x_4$  の関係する制約式を

$$x_3 = 2 - x_1 - x_4$$

と変形する。これを辞書 1 の他の式に代入し、すべての式（目的関数も含む）の右辺から  $x_3$  を消去すると、新しい辞書

(辞書 2) 最小化  $z = -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4$   
制約  $x_3 = 2 - x_1 - x_4$   
 $x_5 =$    
 $x_6 =$    
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

が得られる。ここで、変数の位置を入れ換えているだけなので、辞書 1 と辞書 2 は同値な問題になっている。また、

**辞書 2 は新しい実行可能解を実行可能基底解にもつ辞書である**

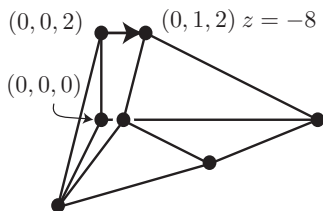
ということを確認しておこう。



## 6. 反復

目的関数の係数より，変数  $x_2 = t$  を増加させる．増加幅は  $t = 1$  になる．このとき新しい実行可能解は，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 2 \\ 0 \\ 1-t \\ 2-t \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\phantom{\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 2 \\ 0 \\ 1-t \\ 2-t \end{bmatrix}}}$$



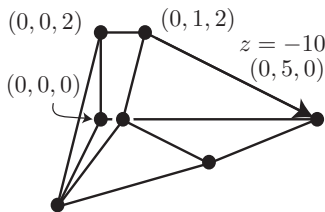
となる．次に辞書を更新する．いま，  
 [非基底変数]  $\begin{bmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{bmatrix} \rightarrow$  正 より，  
 [基底変数]  $\begin{bmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{bmatrix} \rightarrow 0$

$x_2 = 1 + 2x_4 - x_5$  を用いて，辞書 2 の右辺から  $x_2$  を消去すると：

(辞書 3) 最小化  $z = \boxed{\phantom{0}}$   
 制約  $x_3 = \boxed{\phantom{0}}$   
 $x_2 = 1 + 2x_4 - x_5$   
 $x_6 = 1 - x_1 + x_5$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

目的関数の係数より  $\square = 0$  として  $\square = t$  とおくと、新しい実行可能解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \square \rightarrow \square$$



となる。いま [非基底変数]  $\square \rightarrow$  正  
 [基底変数]  $\square \rightarrow 0$

となったので、 $\square$  を用いて、辞書 3 の右辺から  $\square$  を消去すると：

(辞書 4) 最小化  
 制約

$$\square$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

# 単体法の終了

(辞書 4) 最小化  
制 約



$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

いま、すべての変数が零以上であるという制約があり、目的関数の変数の係数がすべて正なので、辞書 4 の最適値は  $x_1 = x_3 = x_5 = 0$  のとき

-10 である。制約式より、辞書 4 の最適解は  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$  で、最適値は

-10 となる。

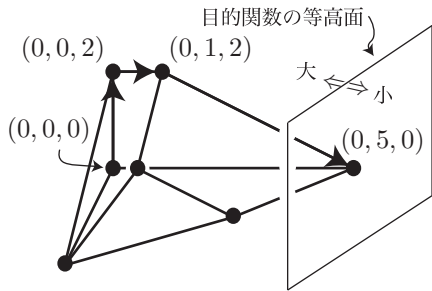
さて、いままでの変形を振り返ると、辞書 1 から変数の位置を変えているだけなので、辞書 4 の最適解は辞書 1 の最適解となる。したがって、

元の問題の最適解は  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$  であり、最適値は  $\begin{bmatrix} \phantom{0} \end{bmatrix}$  となる。

# まとめ

単体法は以下のステップからなる.

- ① スラック変数を導入する
- ② 辞書を作る
- ③ 実行可能基底解を求める
- ④ 解の更新
- ⑤ 辞書の更新
- ⑥ 4, 5 の反復
- ⑦ 4 で解の更新ができなければ終了



まず辞書を作り, はじめの実行可能解  $(0,0,0)$  を求める. この実行可能解を変更し (ステップ 4), 隣の頂点で目的関数値を減少させるものを求める. 辞書を更新し (ステップ 5), また次の頂点を求める. 単体法は, 図の目的関数値が減る方向にある頂点を求めることで, 最適解を求めるアルゴリズムである.