

# 最適化数学 第9回

## [今回の項目]

- ① 復習；線形計画問題，単体法
- ② ピボット

# 線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{最小化} \\ & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{制約} \\ & x_1 \qquad \qquad \qquad + x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

まず、問題 (P) をスラック変数と呼ばれる  $x_4, x_5, x_6$  を導入して次の同値な問題に変形する。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{制約} & x_1 \qquad \qquad \qquad + x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad \qquad \qquad + x_5 = 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + x_6 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

## 2. 辞書を作る

スラック変数を導入した問題の制約式でスラック変数  $x_4, x_5, x_6$  を左辺に残し，残りを右辺へ移項し，目的関数を  $z$  とおく．

$$\begin{array}{ll} \text{(辞書 1)} & \text{最小化} \\ & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{制約} \\ & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ & x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

左辺に現れる変数  $x_4, x_5, x_6$  を **基底変数**，右辺に現れる変数  $x_1, x_2, x_3$  を **非基底変数** と呼ぶ．ここで，

**基底変数は，目的関数の変数に含まれていない**

ことに注意しよう．この形を線形計画問題の **辞書** と呼ぶ．

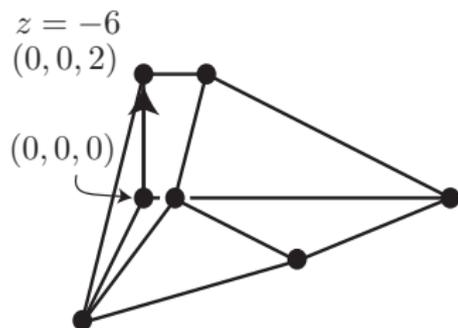
### 3. 実行可能基底解を求め, 4. 解の更新を行う

$$\begin{array}{ll} \text{(辞書 1) 最小化} & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{制約} & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ & x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

まず更新ルール (i) より, 目的関数  $z$  で, 係数が負である非基底変数  $x_3$  を選ぶ. ここで,  $x_3 = t$ , その他の非基底変数  $x_1 = x_2 = 0$  とおくと, 以下を得る:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 2 - t \\ 5 - 2t \\ 6 - 2t \end{bmatrix}$$

## 5. 辞書の更新



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 2-t \\ 5-2t \\ 6-2t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[非基底変数]  $x_3 \rightarrow$  正  
 [基底変数]  $x_4 \rightarrow 0$  より,  $x_3$  と  $x_4$  を入れ換える;

(辞書 2) 最小化  
 制約

$$\begin{aligned} z &= -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 &= 2 - x_1 - x_4 \\ x_5 &= 1 - x_2 + 2x_4 \\ x_6 &= 2 - x_1 - x_2 + 2x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

## 6. 反復

(辞書 3) 最小化  
制約

$$\begin{aligned}z &= -8 + 2x_1 - x_4 + 2x_5 \\x_3 &= 2 - x_1 - x_4 \\x_2 &= 1 + 2x_4 - x_5 \\x_6 &= 1 - x_1 + x_5 \\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0\end{aligned}$$

(辞書 4) 最小化  
制約

$$\begin{aligned}z &= -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5 \\x_4 &= 2 - x_1 - x_3 \\x_2 &= 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5 \\x_6 &= 1 - x_1 + x_5 \\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0\end{aligned}$$

目的関数のすべての変数の係数が零以上なので、最適解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ のとき, 最適値は } -10 \text{ をとる.}$$

# ピボット

$$\begin{array}{ll} \text{(辞書 1)} & \text{最小化} \\ & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{制約} \\ & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ & x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

単体法のより簡便な記法を紹介する. 辞書 1 を次のように書くこととする:

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \\ \hline z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{array}$$

ここで,  $x_1, \dots, x_6 \geq 0$  はどの辞書でも変わらないので省略する. 増加させる非基底変数として  $x_3$  を選ぶと,  $x_4$  が始めに 0 になるので, 左辺に  $x_4$  がある式の  $x_3$  をピボットと呼び, 丸で囲む.

# ピボット

$$\begin{array}{ll} \text{(辞書 1)} & \text{最小化} \\ & z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{制約} \\ & x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ & x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

単体法のより簡便な記法を紹介する．辞書 1 を次のように書くこととする：

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \\ \hline z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_4 = 2 - x_1 - \textcircled{x_3} \\ x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{array}$$

ここで、 $x_1, \dots, x_6 \geq 0$  はどの辞書でも変わらないので省略する．増加させる非基底変数として  $x_3$  を選ぶと、 $x_4$  が始めに 0 になるので、左辺に  $x_4$  がある式の  $x_3$  をピボットと呼び、丸で囲む．

このピボットに注目すると、制約第 2 式の右辺から  $x_3$  を消去するためには、

$$\begin{array}{r}
 x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\
 (-2) \times x_4 = 2 - x_1 \quad - x_3 \\
 \hline
 x_5 - 2x_4 = 1 \quad - x_2 \\
 \Downarrow \\
 x_5 = 1 \quad - x_2 + 2x_4
 \end{array}$$

と計算すればよい。このような計算を他の式にも適用し、新しい辞書

$$\begin{array}{r}
 \text{(D2)} \quad z = -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\
 x_3 = 2 - x_1 \quad - x_4 \\
 x_5 = 1 \quad - \textcircled{x_2} + 2x_4 \\
 x_6 = 2 - x_1 - x_2 + 2x_4
 \end{array}$$

(D2) の右辺から消去する変数を  $x_2$  とする。  $x_2$  を増加させたとき、始めに 0 に達する基底変数は  $x_5$  なので、ピボットは丸の箇所になり、新しい辞書は

$$\begin{array}{l}
 \text{(D3)} \quad z = -8 + 2x_1 - \mathbf{x_4} + 2x_5 \\
 \hline
 \mathbf{x_3} = 2 - x_1 - \textcircled{x_4} \\
 x_2 = 1 \quad \quad \quad + 2x_4 - x_5 \\
 x_6 = 1 - x_1 \quad \quad \quad + x_5
 \end{array}$$

となる。(D3)で右辺から消去する変数を  $x_4$  とする。 $x_4$  を増加させたとき、始めに 0 に達する基底変数は  $x_3$  なので、ピボットは丸の箇所になり、新しい辞書

$$\begin{array}{l}
 \text{(D4)} \quad z = -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5 \\
 \hline
 x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\
 x_2 = 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5 \\
 x_6 = 1 - x_1 \quad \quad \quad + x_5
 \end{array}$$

を得る。ここで目的関数の変数の係数がすべて 0 以上であるので、単体法が終了し、最適値  $-10$  を得る。

# 略記法

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \quad z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \hline x_4 = 2 - x_1 - \textcircled{3} \\ x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{l} \text{(D2)} \quad z = -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ \hline x_3 = 2 - x_1 - x_4 \\ x_5 = 1 - \textcircled{2} + 2x_4 \\ x_6 = 2 - x_1 - x_2 + 2x_4 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{l} \text{(D3)} \quad z = -8 + 2x_1 - x_4 + 2x_5 \\ \hline x_3 = 2 - x_1 - \textcircled{4} \\ x_2 = 1 + 2x_4 - x_5 \\ x_6 = 1 - x_1 + x_5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{l} \text{(D4)} \quad z = -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5 \\ \hline x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ x_2 = 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5 \\ x_6 = 1 - x_1 + x_5 \end{array}$$

よって、 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 5, 0)$  のとき、最小値  $-10$  を取る。

# 例題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{制約} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \quad z = -x_1 - 2x_2 \\ \hline x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 + 2x_1 - \textcircled{x_2} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(D3)} \quad z = -\frac{17}{3} + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ \hline x_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(D2)} \quad z = -4 - 5x_1 + 2x_4 \\ \hline x_3 = 1 - 3\textcircled{x_1} + x_4 \\ x_2 = 2 + 2x_1 - x_4 \end{array}$$

よって、最小解は  $(\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$  で、最小値は  $-\frac{17}{3}$  となる。

# 練習問題

- (1) 最小化  
制約
- $$\begin{aligned} & -4x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
- (2) 最小化  
制約
- $$\begin{aligned} & -x_1 + x_2 - x_3 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 40 \\ & x_1 + x_3 \leq 25 \\ & 2x_2 + 3x_3 \leq 32 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 例外処理

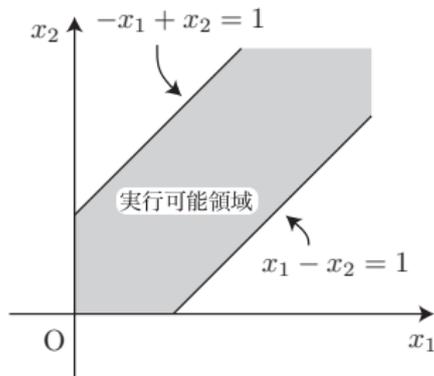
さて、前節の例では特別な問題なしに単体法を適用できたが、実際には次の4つ例外的な場合がある：

- (1) 問題が非有界
- (2) 辞書の退化
- (3) 辞書の巡回
- (4) 初期点が実行不可能

# (1) 問題が非有界

最小化  
制約

$$\begin{aligned} -x_1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(D1)} \quad z &= -x_1 \\ \hline x_3 &= 1 - \textcircled{x_1} + x_2 \\ x_4 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D2)} \quad z &= -1 - x_2 + x_3 \\ \hline x_1 &= 1 + x_2 - x_3 \\ x_4 &= 2 - x_3 \end{aligned}$$

ここで、 $x_2$  の値はいくらでも大きくできる。よって、目的関数値をいくらでも小さくできるので、最適解は存在しない。  
このような問題を非有界な線形計画問題、または単に非有界な問題と呼ぶ。

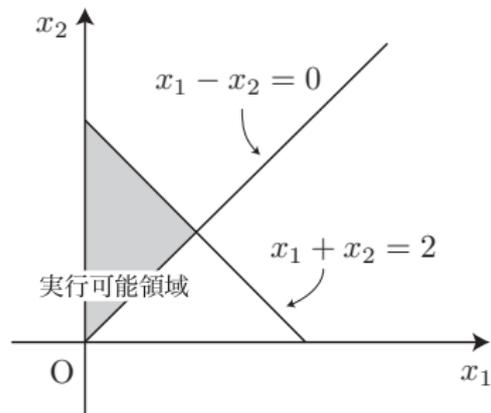
## (2) 辞書の退化

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 \\ \text{制約} & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \quad z = -x_1 \\ \hline x_3 = -\textcircled{x_1} + x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 - x_2 \end{array}$$

このような辞書を退化した辞書と呼ぶ。  
 $x_3$  と  $x_1$  を入れ換えて辞書を更新する。

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \quad z = -x_2 + x_3 \\ \hline x_1 = +x_2 - x_3 \\ x_4 = 2 - \textcircled{2}x_2 + x_3 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{(D2)} \quad z = -1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ \hline x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{array}$$

### (3) 辞書の巡回

退化した辞書が無限に続く場合がある。このような現象を巡回と呼ぶ。巡回を避けるには、ブランドのピボット選択法を用いればよい：

- ① 解の更新ルール (i) で非基底変数を選ぶときに、添字が最小のものを選ぶ
- ② 選んだ非基底変数を増やすことで0になる基底変数が複数ある場合、それらの中で添字が最小のものを選ぶ。

## (4) 初期点が実行不可能

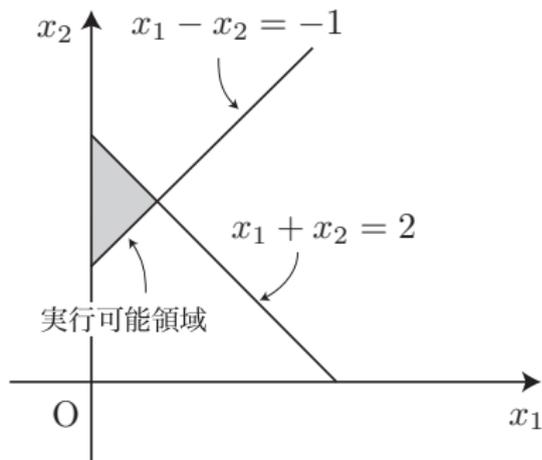
$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 \\ \text{制約} & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \quad z = -x_1 \\ \hline x_3 = -1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 - x_2 \end{array}$$

$(x_1, x_2) = (0, 0)$  が実行不可能.

以下の問題を考える：

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & \\ \text{最小化} & z = x_5 \\ \text{制約} & x_5 = 1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_4 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$



ここで、目的関数は

$$x_5 = x_3 - (-1 - x_1 + x_2)$$

である.

$$(A1) \quad \begin{array}{l} z = 1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ x_5 = 1 + x_1 - \textcircled{x_2} + x_3 \\ x_4 = 2 - x_1 - x_2 \end{array} \quad (A2) \quad \begin{array}{l} z = \phantom{1 + x_1 - x_2 + x_3} + x_5 \\ x_2 = 1 + x_1 + x_3 - x_5 \\ x_4 = 1 - 2x_1 - x_3 + x_5 \end{array}$$

となり，最適解  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, 0)$ ，最適値 0 を得て，問題 (A) に対する単体法が終了する。

ここで，(A1) の制約で  $x_5 = 0$  とおき，(D1) の目的関数を用いて，辞書

$$(D2) \quad \begin{array}{l} z = \phantom{1 + x_1 - x_2 + x_3} - x_1 \\ x_2 = 1 + x_1 + x_3 \\ x_4 = 1 - 2x_1 - x_3 \end{array}$$

を作成すると，この辞書に対して単体法が実行できる。