最適化数学 第 10 回

[今回の項目]

1. 双対問題
2. 潜在価格

栄養問題

各栄養素には一日の最低摂取量が決められている．食品 1，2 には主に 2 種類の栄養素が含まれており，それぞれ以下のように各栄養素の最低摂取量と食品の価格が決まっている：

	食品 1 (x_1)	食品 2 (x_2)	最低摂取量
価格	3	1	
栄養 A	4	3	7
栄養 B	5	2	8

これらを元に消費者と製薬会社が以下のような問題を考えた．

消費者の視点

Q 1. 食費の最小化

必要な栄養を摂りながら食費を最小にするには，どのような割合で二つの食品を購入すればよいか.

食品 1，2 の量を x_1，x_2 とすると，問題は以下のように定式化できる.

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{P}_0) & \text{最小化} & 3x_1 + x_2 & \text{（食費）} \\
 & \text{制　約} & 4x_1 + 3x_2 \geq 7 & \text{（栄養 A の摂取量）} \\
 & & 5x_1 + 2x_2 \geq 8 & \text{（栄養 B の摂取量）} \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

ビタミン剤を作る製薬会社の視点

一方，このような食品に対してある製薬会社が各栄養を含むビタミン剤の価格を決めようとしている．このとき，食品との競合に勝てるようなビタミン剤の価格を決めたい．

Q 2. ビタミン剤の売り上げ最大化

通常の食品より安く栄養を摂れるようにビタミン剤の価格を抑えながら，売上げを最大にするには，ビタミン剤の価格をどのように設定すれば良いだろうか．

栄養と食品価格の関係式

	食品 1 (x_1)	食品 2 (x_2)	最低摂取量
価格	3	1	
栄養A	4	3	7
栄養B	5	2	8

食品 1

(栄養A) × (4 単位) + (栄養B) × (5 単位) = 価格 3

食品 2

(栄養 A) × (3 単位) + (栄養B) × (2 単位) = 価格 1

ビタミンA剤（栄養素A）y_1，ビタミン剤B（栄養素B）y_2 とすると，ビタミン剤で，食品より安く栄養を摂れるような価格は，

$$4y_1 + 5y_2 \leq 3 \quad \text{（食品 1 の価格）}$$
$$3y_1 + 2y_2 \leq 1 \quad \text{（食品 2 の価格）}$$

	食品 1 (x_1)	食品 2 (x_2)	最低摂取量
価格	3	1	
栄養A	4	3	7
栄養B	5	2	8

最低摂取量より，一日で,

ビタミン剤Aは 7 単位，ビタミン剤Bは 8 単位

が購入される．したがって，食品との競合に負けずに売上げを最大にするには，以下の問題を解いて価格 y_1，y_2 を決定すればよい：

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{D}_0) & \text{最大化} & 7y_1 + 8y_2 & \text{(売り上げ)} \\
 & \text{制　約} & 4y_1 + 5y_2 \le 3 & \text{(価格を食品 1 以下に)} \\
 & & 3y_1 + 2y_2 \le 1 & \text{(価格を食品 2 以下に)} \\
 & & y_1, y_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

問題 (P_0) と (D_0) の関係

二つの問題の実行可能領域は空でないと仮定する．(x_1, x_2), (y_1, y_2) をそれぞれ (P_0)，(D_0) の実行可能解とすると

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4y_1 + 5y_2 \leq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

を満たす．これより

$$\begin{aligned} \text{((P}_0\text{) の目的関数)} \quad 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= \\ &\geq (4y_1 + 5y_2)x_1 + (3y_1 + 2y_2)x_2 \\ &= (4x_1 + 3x_2)y_1 + (5x_1 + 2x_2)y_2 \\ &\geq 7y_1 + 8y_2 \quad \text{((D}_0\text{) の目的関数)} \end{aligned}$$

が成り立つ．

不等式の解釈

（(P_0) の目的関数） $3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 =$

$\geq 7y_1 + 8y_2$ （(D_0) の目的関数）

問題におけるこの不等式の意味は,

「消費者の食品購入費 $(3x_1 + x_2)$」$\geq$
「製薬会社のビタミン剤の売り上げ $(7y_1 + 8y_2)$」

それぞれ最適値を考えると，消費者一人あたりの

「消費者の食品購入費の最小値」を,
「製薬会社のビタミン剤の売り上げの最大値」は越えられない.

ということを表している．このように二つの問題の関連性を調べると，経済現象の興味深い性質が見えてくることがある.

双対問題の定義

さて，食費最小化問題 (P_0) は，ベクトルと行列を使うと

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}_0) & \text{最小化} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 & \text{制　約} & \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

と書ける．さらに具体的な数値を記号で置き換えると

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}) & \text{最小化} & {}^t c x \\
 & \text{制　約} & A x \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

と表せる．

Definition

問題 (P) に対して，係数を入れ換えた以下の問題 (D) を双対問題と呼ぶ：

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{最小化} & {}^t c x \\
 & \text{制　約} & Ax \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\text{(D)} & \text{最大化} & {}^t b y \\
 & \text{制　約} & {}^t A y \leq c \\
 & & y \geq 0
\end{array}
$$

双対問題 (D) に対して，元の問題 (P) は 主問題 と呼ばれる．

双対問題に数値を代入すると，ビタミン剤の売り上げ最大化問題を得る．先ほどは問題の意味より裏に隠された問題を得たが，このように機械的に求めることもできる．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{D}_0) & \text{最大化} & \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
 & \text{制　約} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

双対問題の簡単な導出法

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{最小化} & {}^t cx \\
 & \text{制　約} & Ax \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

方針：P の下界を求める．x を P の実行可能解とする．

1. P の制約式を非負倍 $(y_i \geq 0)$ して足し合わせる：

$$ {}^t y(Ax) \geq {}^t yb = {}^t by $$

2. $y \geq 0$ を調整して，${}^t c \geq {}^t yA$ と出来れば,

$$ {}^t cx \geq {}^t y(Ax) \geq {}^t by $$

3. 下界を最大化する．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(D)} & \text{最大化} & {}^t by \\
 & \text{制　約} & {}^t Ay \leq c \\
 & & y \geq 0
\end{array}
$$

双対定理

双対問題は，栄養問題だけでなく一般の線形計画問題において，重要な役割を持つ問題である．双対問題に関する次の定理を挙げる．

［定理］ (双対定理)

(P)	最小化	${}^t cx$	(D)	最大化	${}^t by$
	制　約	$Ax \geq b$		制　約	${}^t Ay \leq c$
		$x \geq \mathbf{0}$			$y \geq \mathbf{0}$

を考える．主問題 (P) と双対問題 (D) に実行可能解が少なくとも一つずつ存在するならば，(P) と (D) にそれぞれ最適解 x^*，y^* が存在し，

$$ {}^t cx^* \text{（ P の最小値）} = {}^t by^* \text{（ D の最大値）} $$

が成り立つ．

栄養問題における双対定理の解釈

証明について解説する前に，この定理を栄養問題に適用すると，ビタミン剤を作る製薬会社が，食品との競合に負けずに売り上げを最大にするように価格を設定すれば，それは

「製薬会社のビタミン剤の売り上げの最大値」
＝「消費者の食品購入費の最小値」

が成り立つような価格になる，ということがわかる．

双対定理の解説

(P) と (D) の任意の実行可能解をそれぞれ x, y とすると，

（弱双対定理）　${}^t cx$（ P の目的関数値）$\geq {}^t by$（ D の目的関数値）

が成り立つことのみを示す．最適値に対する等号の証明は，教科書 5.5 節にある．
まず，ベクトル $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ が $p \leq q$,　$r \geq \mathbf{0}$ を満たすとき，

$$ {}^t rp = r_1 p_1 + \cdots + r_n p_n \leq r_1 q_1 + \cdots + r_1 q_n = {}^t rq $$

が成り立つことに注意する．いま，ベクトル x, y が

$$ \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq \mathbf{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} {}^t Ay \leq c \\ y \geq \mathbf{0} \end{cases} $$

を満たすとする．このとき ${}^t c \geq {}^t({}^t Ay) = {}^t yA$ より，

$$ {}^t cx \geq ({}^t yA)x = {}^t y(Ax) \geq {}^t yb = {}^t by $$

が成り立つ．

潜在価格

Example

工場で製品 1，製品 2 を作っている．各製品の価格と必要な原材料A，Bの量は以下のようになる：

	製品 1	製品 2	在庫
原材料A	1 kg	1 kg	4 kg
原材料B	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

Q 1.

在庫を考慮しながら，各製品をいくつずつ作れば利益が最大になるか?

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{最大化} & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{制　約} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}
$$

いま，(P) に単体法を適用すると解は $(x_1, x_2) = (1, 3)$，最適値 26 となることがわかる．

	製品 1	製品 2	在庫
原材料A	1 kg	1 kg	4 kg
原材料B	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

Q 2.

原材料Aか原材料Bのどちらかの在庫を 1kg だけ増やせるとしたら，どちらを増やしたほうが最大利益が増えるか?

原材料Aの在庫を 1 個増やすというのは，以下に対応する．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}_1) & \text{最大化} & 8x_1 + 6x_2 \\
 & \text{制　約} & x_1 + x_2 \leq \mathbf{4+1} \\
 & & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

よって，Q 2 は，一つ目の制約式の右辺を 1 増やした問題 (P_1) の最適値と，二つ目の制約式の右辺を 1 増やした問題の最適値を求めて，二つの値を比較すれば答えを得られる．

双対問題の解の役割

(P) 最大化 $8x_1 + 6x_2$
制　約 $x_1 + x_2 \leq 4$
$3x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$

(D) 最小化 $4y_1 + 6y_2$
制　約 $y_1 + 3y_2 \geq 8$
$y_1 + y_2 \geq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$

双対問題 (D) の解 $(y_1, y_2) = (\mathbf{5}, \mathbf{1})$ は次のような性質を持つ：

- (P) の一つ目の制約式の右辺を 1 増やすと，最適値は **5**（y_1 の値）増える
- (P) の二つ目の制約式の右辺を 1 増やすと，最適値は **1**（y_2 の値）増える

上記が成り立つ理由は後述する．
これより，原材料Aの在庫を 1 増やした方が最大利益の増加が大きいことがわかる．

潜在価格

	製品 1	製品 2	在庫
原材料A	1 kg	1 kg	4 kg
原材料B	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

ここで，双対問題の解 y_1 は原材料Aの隠された価値を表している．実際には，原材料の価値は表に隠されていると言える．これより，y_1 は原材料Aの 潜在価格 と呼ばれる．同様に y_2 は原材料Bの潜在価格である．

解の性質の説明

(P)　最大化　$8x_1 + 6x_2$
　　制　約　$x_1 + x_2 \le 4$
　　　　　　$3x_1 + x_2 \le 6$
　　　　　　$x_1, x_2 \ge 0$

(D)　最小化　$4y_1 + 6y_2$
　　制　約　$y_1 + 3y_2 \ge 8$
　　　　　　$y_1 + y_2 \ge 6$
　　　　　　$x_1, x_2 \ge 0$

強双対定理より

$$\text{((P) の最適値)} \quad 8\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2 = 4\bar{y}_1 + 6\bar{y}_2 \quad \text{((D) の最適値)}$$

(P_1)　最大化　$8x_1 + 6x_2$
　　制　約　$x_1 + x_2 \le \mathbf{4} + \mathbf{1}$
　　　　　　$3x_1 + x_2 \le 6$
　　　　　　$x_1, x_2 \ge 0$

(D_1)　最小化　$(\mathbf{4} + \mathbf{1})y_1 + 6y_2$
　　制　約　$y_1 + 3y_2 \ge 8$
　　　　　　$y_1 + y_2 \ge 6$
　　　　　　$x_1, x_2 \ge 0$

同様に，問題 (P_1) と (D_1) についても

$$\text{((}\mathrm{P}_1\text{) の最適値)} = \text{((}\mathrm{D}_1\text{) の最適値)}$$

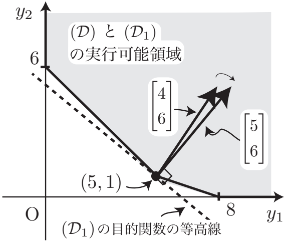
ここで，問題 (D) と (D_1) に注目すると，制約式が全く同じで，目的関数の係数のみ少し異なる．よって，第一に

双対問題 (D) と (D_1) の実行可能領域は等しい

また，目的関数の係数が

$$(\mathrm{D}):\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\longrightarrow(\mathrm{D}_1):\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$$

と変化しても，目的関数の等高線と接する点は変化しない．



よって第二に

双対問題 (D) と (D_1) の最適解は等しい

ということがわかる．したがって，

$$\begin{aligned}\bigl((\mathrm{P}_1)\text{ の最適値}\bigr)&=\bigl((\mathrm{D}_1)\text{ の最適値}\bigr)\\&=(4+1)\bar{y}_1+6\bar{y}_2=\bigl((\mathrm{D})\text{ の最適値}\bigr)+1\cdot\bar{y}_1\\&=\bigl((\mathrm{P})\text{ の最適値}\bigr)+\bar{y}_1\end{aligned}$$