

最適化数学 第 13 回

[今回の項目]

- ① 変分問題：最適性条件の証明
- ② 制約つき変分問題
- ③ 最適性条件

復習：固定端変分問題

[定理] (一般の汎関数に対する最適性必要条件)

$$\text{最小化 } F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$\text{制約 } y(a) = A, y(b) = B$$

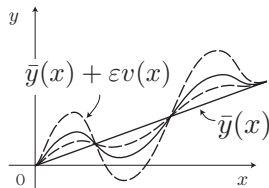
に対して、 $\bar{y}(x)$ を局所最小解とする。このとき $\bar{y}(x)$ は、以下を満たす：

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} f_z[\bar{y}(x)] = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A, \bar{y}(b) = B. \end{cases}$$

(汎関数が凸とは限らない一般の場合。凸の場合はすでに示した.)

証明の概要：固定端変分問題

$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする。すると、



(制約 $y(a) = A$, $y(b) = B$ を満たし $\bar{y}(x)$ に十分近いすべての $y(x)$)

が成り立つ。

ここで、 $v(x)$ を $v(a) = 0$, $v(b) = 0$ を満たす任意の関数とする。それに対して、 ϵ を十分小さい数とすれば

$$\bar{y}(x) + \epsilon v(x)$$

は、制約を満たし $\bar{y}(x)$ に近い関数である。よって、

$$\boxed{\phantom{F(\bar{y})}} \geq F(\bar{y}) \quad (\text{十分小さい } \epsilon)$$

が成り立つ。

証明の概要：続き

ここで $\phi(\varepsilon) = F(\bar{y} + \varepsilon v)$ とおくと

$$\boxed{} \geq \boxed{} \quad (\text{十分小さい } \varepsilon)$$

が成り立つ。いま、 $\phi(\varepsilon)$ は 1 変数関数なので、 $\varepsilon = 0$ が局所最小解であることから $\phi'(0) = \boxed{}$ が成り立つ。方向微分の定義より、

$$DF(\bar{y})(v) = \phi'(0) = \boxed{}$$

を得る。方向微分の第 2 公式と $v(a) = v(b) = 0$ より

$$\begin{aligned} 0 = DF(\bar{y})(v) &= \boxed{} \\ &= \int_a^b \boxed{} dx \end{aligned}$$

を得る。

証明の概要：続き

よって

$$\int_a^b \boxed{} v(x) dx = 0$$

($\boxed{}$ を満たすすべての $v(x)$)

が成り立ち、これより、

$$\boxed{} = 0 \quad (\text{すべての } x \text{ で } 0 \text{ となる関数})$$

を得る (オイラー-ラグランジュ方程式)。

制約つき変分問題

固定端変分問題は、制約が簡単であったが、以下のようにより難しい制約を持つ変分問題も多い。

Example

例で挙げた懸垂線問題は

$$\text{最小化 } F(y) := \int_a^b mgy(x)\sqrt{1+y'(x)^2} dx$$

$$\text{制約 } G(y) := \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2} dx = \ell$$

$$y(a) = h, \quad y(b) = h$$

となる。

制約には端点制約の他に積分で表される制約も含まれている。

制約つき変分問題の一般形

$$\text{最小化 } F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$\text{制約 } G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx = \ell$$

$$y(a) = A, y(b) = B$$

この問題では、関数 $\bar{y}(x)$ が

$$y(a) = A, y(b) = B$$

を満たし、 $\bar{y}(x)$ に近いすべての関数 $y(x)$ に対して

となる、 $\bar{y}(x)$ が局所最小解である。

制約つき変分問題に対する実験的考察 その一

制約つき変分問題に対して、そのままではオイラー-ラグランジュ方程式は使えない。

まず、最も単純な積分制約から考える。

$$\text{最小化 } F(y) := \int_0^1 f[y(x)] dx$$

$$\text{制 約 } \int_0^1 y(x) dx = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

この問題の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とおく。すると

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

($y(0) = 0, y(1) = 1$ を満たし $\bar{y}(x)$ に近い $y(x)$)

が成り立つ。

考察その一の続き

$v(x)$ を $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の関数とすると,

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$

($v(0) = v(1) = 0$ を満たすすべての関数 v)

いま, $\bar{y}(x)$ は制約を満たすので, 関数 $v(x)$ に対して

$$\int_0^1 \{\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)\} dx = 1 \iff \int_0^1 v(x) dx =$$

となる. よって

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$

($v(0) = 0, v(1) = 0$ を満たすすべての $v(x)$)

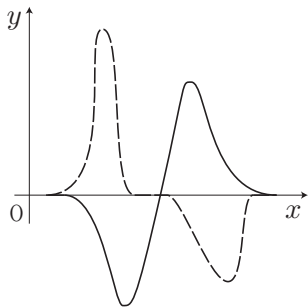
考察その一の続き

したがって、固定端問題の証明と同様にして、

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx} \{ f_z[\bar{y}(x)] \} \right] v(x) dx = 0$$

($\int_0^1 v(x) dx = 0$, $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ を満たすすべての $v(x)$)

を得る。固定端問題の場合の証明内の式とそっくりだが、 $v(x)$ に積分制約が加わっている。



積分が 0 になる関数 $v(x)$ をかけて、積分値が 0 になるものは？

↓



制約つき変分問題に対する実験的考察 その二

次に少し複雑な積分制約について考える.

$$\text{最小化 } F(y) := \int_0^1 f[y(x)] dx$$

$$\begin{aligned} \text{制約 } G(y) &:= \int_0^1 \{20y(x) + e^{2x}y'(x)\} dx = 1 \\ &y(0) = 0, y(1) = 1 \end{aligned}$$

の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とする. すると,

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

$$(G(y) = 1, y(0) = 0, y(1) = 1 \text{ を満たすすべての関数})$$

が成り立つ.

考察その二の続き

$v(x)$ を $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の関数とすると,

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$

($v(0) = 0, v(1) = 0$ を満たすすべての関数 v)
いま, $G(\bar{y} + v) = \int_0^1 [20 \{ \bar{y}(x) + v(x) \} + e^{2x} \{ \bar{y}'(x) + v'(x) \}] dx = 1$

$$\iff \text{ } = 0$$

$$\iff \int_0^1 (20 - 2e^{2x}) v(x) dx = 0 \text{ (部分積分)}$$

より,

$$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$

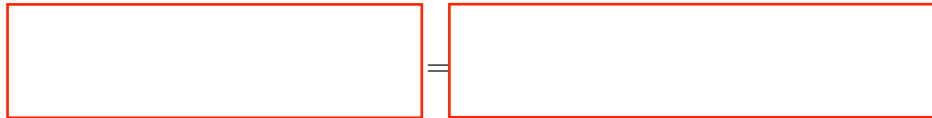
($v(0) = 0, v(1) = 0$
を満たすすべての関数 v)

一般の制約の場合

先程の考察を一般化すると、制約式が

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx$$

のとき、局所最小解 $\bar{y}(x)$ に対するオイラー-ラグランジュ方程式の両辺の差は、ある実数 λ に対して



となることが示せる。 $\frac{d}{dx}$ のある項を左辺に、 $\frac{d}{dx}$ のない項を右辺に移項し、 λ を $-\lambda$ に置き換えると



となる。

制約つき変分問題の最適性条件

[定理]

$$\text{最小化 } F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$\text{制約 } G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx = \ell$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

に対して、 $\bar{y}(x)$ を局所最小解とする. このとき $DG(\bar{y})(\cdot)$ が正則ならば, ある実数 λ が存在して, $\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ に対して, $\bar{y}(x)$ は

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \tilde{f}_z[\bar{y}(x)] = \tilde{f}_y[\bar{y}(x)] \\ \int_a^b g[\bar{y}(x)] dx = \ell \\ \bar{y}(a) = A, \quad \bar{y}(b) = B \end{cases}$$

を満たす.

制約つき変分問題の停留関数

Definition

定理で用いた

$$\tilde{f}(x, y, z) =$$

を ラグランジュ関数 と呼ぶ.

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \\ \int_a^b g[y(x)] dx = \ell \\ y(a) = A, y(b) = B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を, 問題 (2) における 停留関数 と呼ぶ. また, (*) の微分方程式

も, 単に オイラー-ラグランジュ方程式 と呼ぶ.

解法例

Example

制約付き変分問題

$$\text{最小化 } F(y) := \int_0^1 y'(x)^2 dx$$

$$\text{制約 } G(y) := \int_0^1 y(x) dx = 1$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

停留関数を求めよ。

板書

練習問題

(1) 最小化 $F(y) := \int_0^{\pi} \{2y(x) \sin x + y'(x)^2\} dx$

制約 $G(y) := \int_0^{\pi} y(x) dx = 1$

$$y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

(2) 最小化 $F(y) := \int_0^1 \{4y(x) + y'(x)^2\} dx$

制約 $G(y) := \int_0^1 xy(x) dx = \frac{1}{4}$

$$y(0) = 0, y(1) = -1$$