

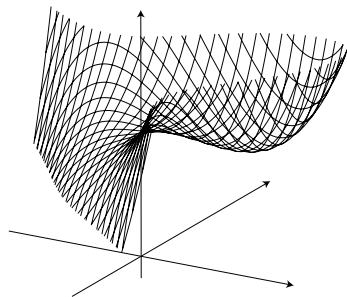
最適化数学 第4回

[今回の項目]

- ① 復習：局所最適解の求め方
- ② 問題練習

復習：制約なし最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \\ \text{制約} & \text{なし} \end{array}$$



$x^3 - 3xy + y^3$ のグラフ

復習：1 次の最適性条件

[定理] (一次の最適性条件)

$f(x)$: 多変数関数

点 \bar{x} が局所最適解ならば,

$$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{零ベクトル})$$

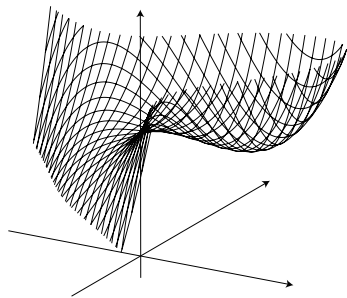
が成り立つ.

[定義]

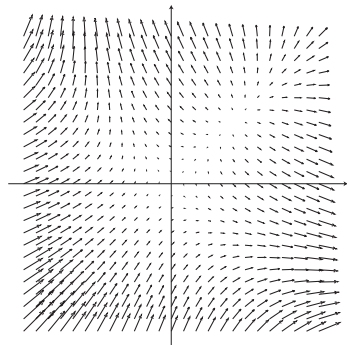
点 p が, $\nabla f(p) = \mathbf{0}$ を満たすとき, p を f の停留点と呼ぶ.

復習：停留点

$$\text{最小化 } f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$



$x^3 - 3xy + y^3$ のグラフ



$x^3 - 3xy + y^3$ の勾配ベクトル

復習：ヘッセ行列を用いた判定法

停留点 \bar{x} を局所最小解とすると、

\bar{x} で『グラフは局所的に下に窪んでいる』

↔ 点 \bar{x} の近くで関数 f は『局所的に凸関数である』

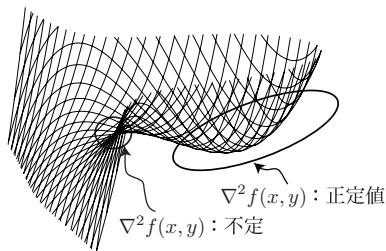
[定理] (2次の最適性条件)

- ① (必要性) \bar{x} が局所最小解
⇒ $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ かつ $\nabla^2 f(\bar{x})$ が半正定値
- ② (十分性) $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ かつ $\nabla^2 f(\bar{x})$ が正定値
⇒ \bar{x} は局所最小解.
- ③ (否定) $\nabla^2 f(\bar{x})$ が不定値のとき, \bar{x} は局所最適解ではない.

局所最大解についても、それぞれ対応する箇所を半負定値, 負定値, 極大値に置き換えたものが成り立つ.

復習：2 次の最適性条件の幾何的イメージ

- (十分性) $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ かつ $\nabla^2 f(\bar{x})$ が正定値
 $\implies \bar{x}$ は局所最小解.
- (否定) $\nabla^2 f(\bar{x})$ が不定値のとき, \bar{x} は局所最適解ではない.



例題

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

の局所最適値を求めよ.

[補足]

- $\nabla f(\bar{x})$ が正定値
 $\iff \nabla f(\bar{x})$ の固有値がすべて正
- f が 2 変数の場合：
 $\det [\nabla^2 f(\bar{x})] > 0$ (行列式), かつ $f_{xx}(\bar{x}) > 0 \implies f$ は正定値

例題

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x - 6y$$

の局所最適値を求めよ。

(解答例) $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 6 \\ 3y^2 - 6 \end{bmatrix}$, $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$ より,

連立方程式 $\begin{cases} 3x^2 - 6 = 0 \\ 3y^2 - 6 = 0 \end{cases}$ を解くと, 停留点 $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

(順不同) を得る。

(x, y)	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$
$ \nabla^2 f(x, y) $	+	+	-
$f_{xx}(x, y)$	+	-	
	小	大	不定
$f(x, y)$	$-8\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	

である。よって, $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ のとき, 局所最小値 $-8\sqrt{2}$,
 $(x, y) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ のとき, 局所最大値 $8\sqrt{2}$ をとる。

練習問題

$$(1) \quad f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 12xy + 1$$

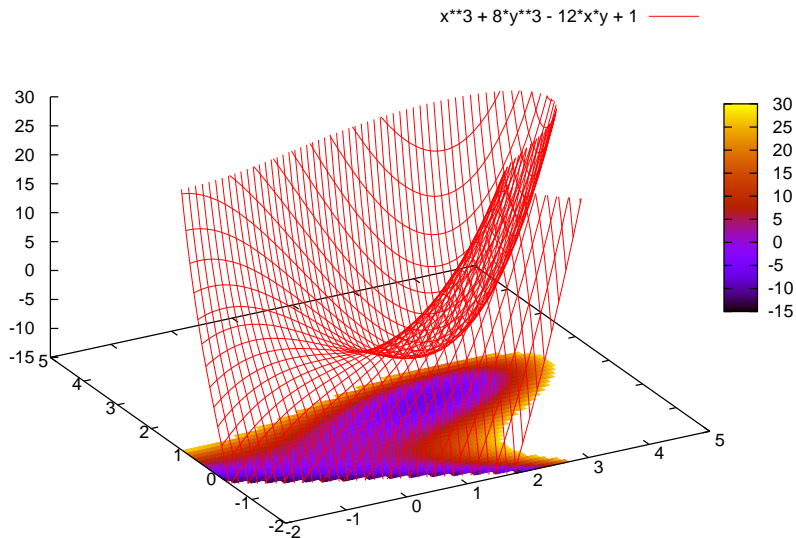
$$(2) \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$$

練習問題

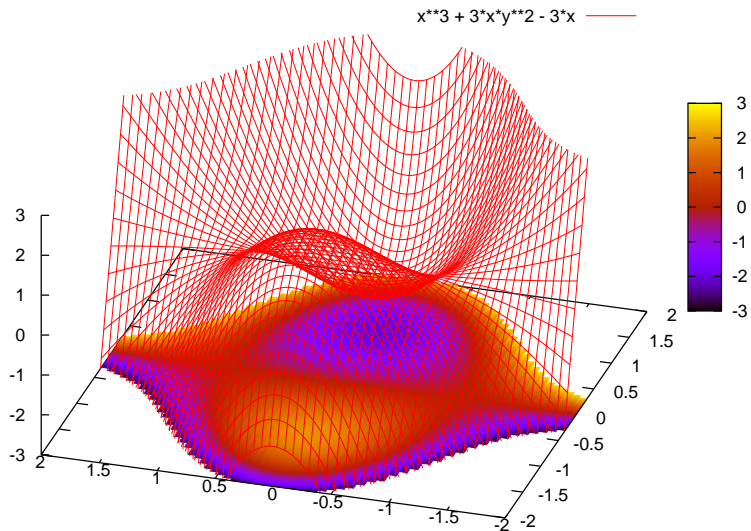
$$(3) \quad f(x, y) = x^4 - 4x^2 + 8y^2 + 4x^2y$$

$$(4) \quad f(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^2 + 3y^2 + 3xy - 3x - 3y - 3z + 2$$

$$(1) \quad f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 12xy + 1$$



$$(2) \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$$



$$(3) \quad f(x, y) = x^4 - 4x^2 + 8y^2 + 4x^2y$$

