最適化数学

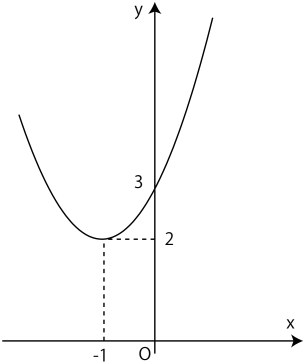
関口 良行

流通情報工学科

最適化数学とは？

関数の最小値, 又は最大値を探す

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ の最小値は？

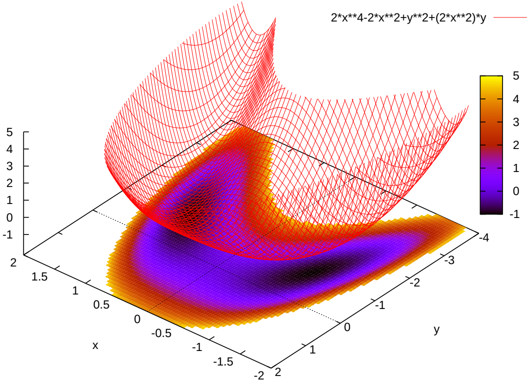


$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 2x + 3 \\
&= (x+1)^2 + 2
\end{aligned}
$$

より，最小値は 2, 最小解は $x = -1$

多変数関数

$$z = 2x^4 - 2x^2 + y^2 + 2x^2yz$$



$(x, y) = (1, -1), (-1, -1)$ で最小値 -1 をとる
多変数関数の微分を使えば解ける！

最適なかたち

辺の長さが一定の長方形の中で, 面積が最大になるのはどのような場合か？

最適なかたち

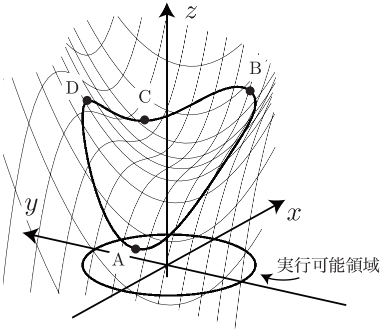
辺の長さが一定の長方形の中で, 面積が最大になるのはどのような場合か？

数式で表すと

$$\begin{aligned} \text{最小化} \ & xy \\ \text{制約} \ & x + y = a \ (\text{定数}), x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

これを解くと, <u>正方形</u> が面積を最大にすることがわかる.

多変数関数の最小値

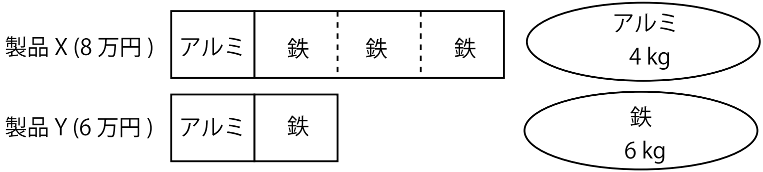


2 変数関数を円周上で最小化する問題を考える：

$$\text{最小化}\ x^3 - xy + y^2 + 2$$
$$\text{制約}\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

このような図がないとき，計算によって最適解を見つけるにはどうしたらよいだろうか？

線形計画; 工場を経営する



さて製品 X, Y をいくつづつ作れば利益が最大になるでしょう？

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	$1\ kg$	$1\ kg$	$4\ kg$
鉄	$3\ kg$	$1\ kg$	$6\ kg$
価格	8 万円	6 万円	

線形計画; 工場を経営する

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	$1\ kg$	$1\ kg$	$4\ kg$
鉄	$3\ kg$	$1\ kg$	$6\ kg$
価格	8 万円	6 万円	

製品 X を x 個
製品 Y を y 個 $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\ & 8x + 6y \quad (\text{利益}) \\
\text{制約式}\ & x + y \le 4 \quad (\text{アルミの在庫}) \\
& 3x + y \le 6 \quad (\text{鉄の在庫}) \\
& x, y \ge 0
\end{aligned}
$$

例えば, 製品 X を 2 個, 製品 Y を 0 個作るとすると, 材料の在庫はちゃんと足りていて (鉄を使い切る), 利益は $8 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = 16$ となる. これは最大値 ?

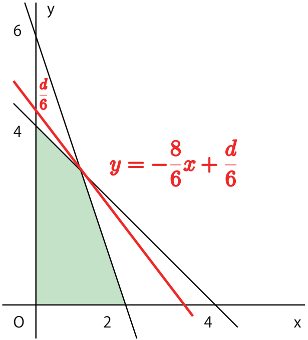
答え

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$



$8x + 6y = d$ とおくと, $y = -\frac{8}{6}x + \frac{d}{6}$ となるので, 図より $x = 1, y = 3$ のとき, 最大値 $8 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 26$ となる.

製品 X を 1 個と製品 Y を 3 個作ると利益が最大になる.

裏問題

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

解 $x = 1$,$y = 3$, 最大値 26

裏問題

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

解 $x = 1, y = 3$, 最大値 26

[裏問題]

最小化 $4s + 6t$

制約式 $s + 3t \leq 8$

$s + t \leq 6$

$s, t \geq 0$

裏問題の解は $s = 5, t = 1$ で最小値 26 をとる.

表問題の最大値と一緒！

最適化問題には最適値が一致するような
裏問題がある！

裏問題の役割

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	$1\ kg$	$1\ kg$	$4\ kg$
鉄	$3\ kg$	$1\ kg$	$6\ kg$
価格	8 万円	6 万円	

裏問題の解

$s = 5, t = 1$

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

Q. もし出来るとしたら，アルミと鉄のどちらの在庫を増やした方が利益が大きくなるか?

裏問題の役割

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	$1\ kg$	$1\ kg$	$4\ kg$
鉄	$3\ kg$	$1\ kg$	$6\ kg$
価格	8 万円	6 万円	

裏問題の解

$s = 5, t = 1$

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

Q. もし出来るとしたら，アルミと鉄のどちらの在庫を増やした方が利益が大きくなるか?

答え アルミ

理由

アルミの在庫を $1\ kg$ 増やすと最大利益は 5 万円 増える.

鉄の場合は 1 万円 しか増えない.

(注意: 製品数に小数点をいれて考える)

裏問題の役割

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	$1\ kg$	$1\ kg$	$4\ kg$
鉄	$3\ kg$	$1\ kg$	$6\ kg$
価格	8 万円	6 万円	

裏問題の解
$s = 5, t = 1$

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

Q. もし出来るとしたら，アルミと鉄のどちらの在庫を増やした方が利益が大きくなるか?

答え アルミ

理由

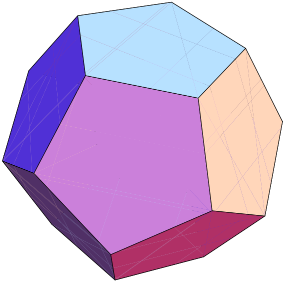
アルミの在庫を 1 kg 増やすと最大利益は <u>5 万円</u> 増える．
鉄の場合は <u>1 万円</u> しか増えない．

(注意: 製品数に小数点をいれて考える)

多面体

もっと変数の数が多くなると（実際には数千個）

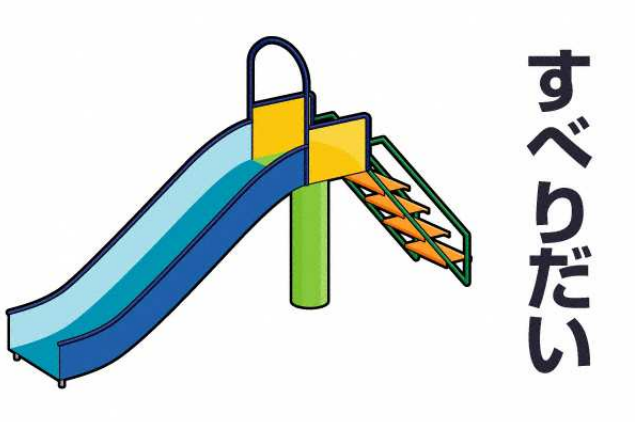
$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
\text{制約式} & x_1 + x_3 \le 2 \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\
 & x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{array}
$$



多面体の性質を用いて解く！

最速滑り台

どのような形の滑り台が最も早く滑れるか？ただし到達点は指定されている (真っ直ぐ降りるのではない)



出典: 情報処理推進機構

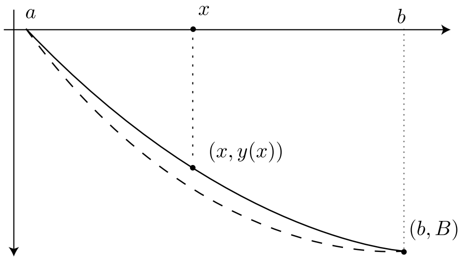
変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで滑り台の形を表す．重力による加速度を g とおくと, 高さ y のときの速度 v は, エネルギー保存則より $mv^2/2 = mgy$ を満たすので $v = \sqrt{2gy}$ となる.

よって, 移動時間は

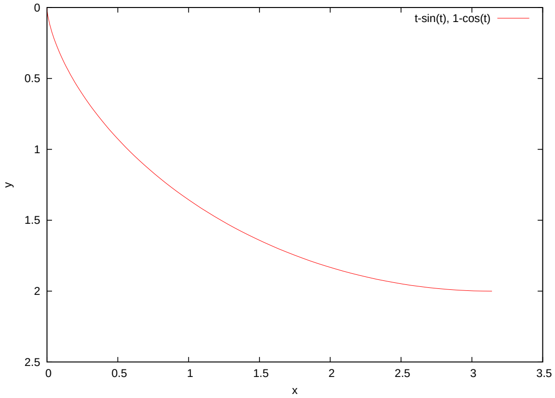
$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx$$

となる．この積分値を最小にする関数 $y(x)$ のグラフが最速滑り台の形を表す.



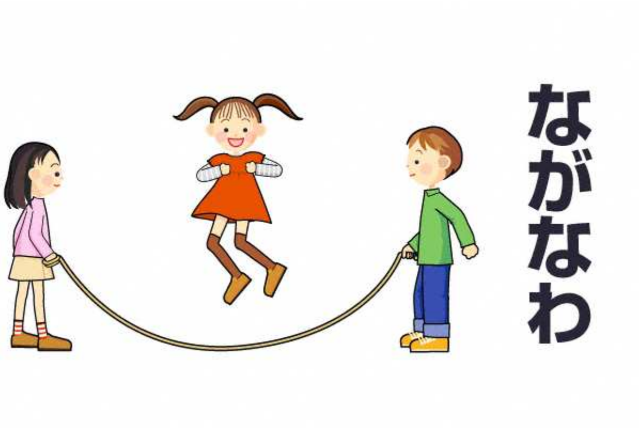
最速滑り台のかたちは,

$$\text{サイクロイド}\quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases}$$



長縄のかたち

二人の人が, 地面につかないように長縄を持ったとき, 長縄はどのような形で垂れ下がるか？



出典: 情報処理推進機構

変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで縄の形を表す．縄の両端の高さを h, 長さを l, 密度を m とする．両端の座標を (a,h), (b,h) とする．縄は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$\int_a^b \left(m\sqrt{1+y'(x)^2}gy(x)\right)\,dx$$

を, 長さ

$$\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx=\ell$$

両端 $y(a)=y(b)=h$ という条件のもとで最小にする関数 $y(x)$ を見つければよい．

長縄のかたちは,

$$\text{懸垂線}\quad y(x) = \frac{e^{\frac{x+d}{c}} + e^{-\frac{x+d}{c}}}{2c} - \lambda$$

$(c, d, \lambda$ は縄の長さ, 密度, 両端の高さ, 位置などで決まる定数$)$