

最適化数学 自習問題 (担当：関口 良行)

1. 自習用の問題です. テスト勉強に役立ててください.
2. 答えは教科書に載っています.
3. 試験は手書きの A4 一枚のみ持ち込み可能です. (コピーは不可)

制約なし最適化問題

1. 次の関数の停留点を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

$$(2) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 6zy - 2x - 2y + 2z$$

2. 局所最適値 (極値) を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1 \quad (2) f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$$

$$(3) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz - zx + x + y - 2z + 1$$

$$(4) f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x \quad (5) f(x, y) = 2x^4 - 2x^2 + y^2 + 2x^2y$$

制約つき最適化問題

1. 最適化問題の局所最適解を求めよ. また大域最適解が求まるときは求めよ.

$$(1) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = 2x - 3y \\ \text{制約} & g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \quad (2) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = x^3 + y^3 \\ \text{制約} & g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y, z) = x + y + z \\ \text{制約} & g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ & g_2(x, y, z) = x - y + z = 0 \end{array}$$

2. x, y が原点を中心とする半径 1 の円周上の点であるとき, $2x^2 - 6xy + 2y^2$ の最小値と最大値を求めよ.

3. 以下の最小化問題の最小値を求めよ. ただし以下の問題はすべて最小解を持つ.

$$(1) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \\ \text{制約} & g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{array} \quad (2) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y) = xy \\ \text{制約} & g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{array}$$

4. 以下の最小化問題の KKT 条件を求めよ (解は求めなくてよい).

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x - y + 2z \\ \text{制約} & x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 \leq 0 \\ & 2x + 2y + z - 1 = 0 \end{array}$$

裏面へ続く

変分問題

1. 次の汎関数の値を与えられた関数に対して計算せよ.

$$F(y) = \int_0^1 \{xy(x) + y'(x)^2\} dx$$

(1) $y(x) = 3x^2$ (2) $y(x) = \sin(\pi x)$

2. 以下の汎関数の被積分関数を書き, 関数 $y(x)$ における $v(x)$ に対する方向微分を求めよ.

(1). $F(y) = \int_0^1 \{xy(x) + y'(x)^3\} dx$ (2). $G(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

3. 変分問題の停留関数を求めよ.

(1) 最小化 $F(y) := \int_0^1 \{2xy(x) + y'(x)^2\} dx$
制約 $y(0) = 1, y(1) = 0$

(2) 最小化 $F(y) := \int_0^1 \{-2e^x y(x) + y'(x)^2\} dx$
制約 $y(0) = 0, y(1) = 0$

(3) 最小化 $F(y) = \int_0^1 (1 + x^2)y'(x)^2 dx$
制約 $y(0) = 1, y(1) = 0$

4. 次の制約つき変分問題の停留関数を求めよ.

(1) 最小化 $F(y) := \int_0^1 \left\{ y(x) + \frac{1}{4}y'(x)^2 \right\} dx$
制約 $G(y) := \int_0^1 y(x) dx = 2$
 $y(0) = 1, y(1) = 0$

(2) 最小化 $F(y) := \int_0^1 y'(x)^2 dx$
制約 $G(y) := \int_0^1 xy'(x) dx = 5$
 $y(0) = 1, y(1) = 10$

(3). 最小化 $F(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(x)^2 dx$
制約 $G(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(x) \sin x dx = \frac{7}{8}\pi^2$
 $y(0) = \pi/2, y(\pi/2) = \pi^3/2$