最適化数学 第 13 回

[今回の項目]

1. 変分問題：最適性条件の証明
2. 制約つき変分問題
3. 最適性条件

復習：固定端変分問題

［定理］(一般の汎関数に対する最適性必要条件)

$$\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$$

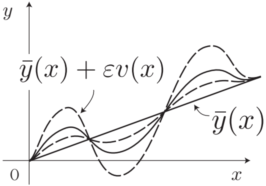
$$\textbf{制　約} \quad y(a) = A,\ y(b) = B$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $\bar{y}(x)$ は，以下を満たす：

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[\bar{y}(x)] = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B. \end{cases}$$

（汎関数が凸とは限らない一般の場合．凸の場合はすでに示した.）

証明の概要：固定端変分問題



$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．すると，

（制約 $y(a) = A$，$y(b) = B$ を満たし $\bar{y}(x)$ に十分近いすべての $y(x)$）

が成り立つ．

ここで，$v(x)$ を $v(a) = 0$，$v(b) = 0$ を満たす任意の関数とする．それに対して，ε を十分小さい数とすれば

は，制約を満たし $\bar{y}(x)$ に近い関数である．よって，局所最小値の定義より，

$$\geq F(\bar{y}) \quad （十分小さい \varepsilon）$$

が成り立つ．

証明の概要：続き

ここで $\phi(\varepsilon) = F(\bar{y} + \varepsilon v)$ とおくと（単なる書き換え）

$$\boxed{} \geq \boxed{} \qquad (\text{十分小さい } \varepsilon\,)$$

が成り立つ．いま，$\phi(\varepsilon)$ は 1 変数関数なので，$\varepsilon = 0$ が局所最小解であることから $\phi'(0) = \boxed{}$ が成り立つ．方向微分の定義より，

$$\boxed{}$$

を得る．さらに方向微分の第 2 公式と $v(a) = v(b) = 0$ より

$$0 = DF(\bar{y})(v) = \boxed{}$$

$$= \int_a^b \boxed{}\, dx$$

を得る．

証明の概要：続き

よって

$$\int_a^b \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \, dx = 0$$

$$\left(\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \text{を満たすすべての } v(x) \right)$$

が成り立ち，これより，

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad \text{（すべての } x \text{ で } 0 \text{ となる関数）}$$

を得る（オイラー–ラグランジュ方程式）.

制約つき変分問題

固定端変分問題は，制約が簡単であったが，以下のようにより難しい制約を持つ変分問題も多い．

Example

例で挙げた懸垂線問題は

$$
\begin{aligned}
&\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_a^b mgy(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \\
&\textbf{制　約} \quad G(y) := \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell \\
&\qquad\qquad\ y(a) = h, \quad y(b) = h
\end{aligned}
$$

となる．

制約には端点制約の他に積分で表される制約も含まれている．

制約つき変分問題の一般形

最小化 $F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$

制　約 $G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell$

$$y(a) = A,\ y(b) = B$$

この問題では，関数 $\bar{y}(x)$ が

$$\boxed{} \quad y(a) = A,\ y(b) = B$$

を満たし，$\bar{y}(x)$ に近いすべての関数 $y(x)$ に対して

$$\boxed{}$$

となる $\bar{y}(x)$ が局所最小解である．

制約つき変分問題に対する実験的考察 その一

制約つき変分問題に対して，そのままではオイラー–ラグランジュ方程式は使えない．
まず，以下の積分制約から考える．

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化} & F(y) := \displaystyle\int_0^1 f[y(x)]\,dx \\
\textbf{制　約} & \displaystyle\int_0^1 y(x)\,dx = 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1
\end{array}
$$

この問題の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とおく．すると

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

($\boxed{\qquad\qquad}$, $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ を満たし $\bar{y}(x)$ に近い $y(x)$)

が成り立つ．

考察その一の続き

$v(x)$ を $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の関数とすると，

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

($\boxed{\qquad\qquad\qquad}$, $v(0) = v(1) = 0$ を満たすすべての関数 v)

いま，$\bar{y}(x)$ は制約を満たすので，関数 $v(x)$ に対して

$$\int_0^1 \{\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)\}\, dx = 1 \iff \int_0^1 v(x)\, dx = \boxed{\quad}$$

となる．よって，以下が成り立つ．

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

($\boxed{\qquad\qquad\qquad}$, $v(0) = 0,\ v(1) = 0$ を満たすすべての $v(x)$)

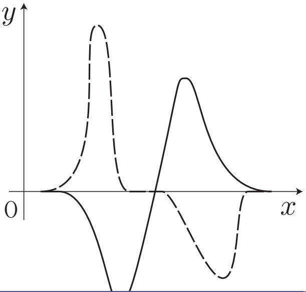
考察その一の続き

したがって，固定端問題の証明と同様に，方向微分が 0 であることと，第 2 公式を用いると，

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{ f_z[\bar{y}(x)] \right\} \right] v(x)\, dx = 0$$

（ $\int_0^1 v(x)\, dx = 0$， $v(0) = 0$， $v(1) = 0$ を満たすすべての $v(x)$ ）

を得る．固定端問題の場合の証明内の式とそっくりだが，$v(x)$ に積分制約が加わっている．



積分値が 0 になる関数 $v(x)$ に対して，常に $\int_0^1 h(x)v(x)\, dx = 0$ となる $h(x)$ は？

$\Downarrow$

制約つき変分問題に対する実験的考察 その二

次に少し複雑な積分制約について考える.

$$
\begin{aligned}
&\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_0^1 f[y(x)]\,dx \\
&\textbf{制　約} \quad G(y) := \int_0^1 \left\{20y(x) + e^{2x}y'(x)\right\}\,dx = 1 \\
&\qquad\qquad\ \ y(0) = 0,\ y(1) = 1
\end{aligned}
$$

の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とする．すると,

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

($\boxed{\qquad\qquad\qquad}$, $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ を満たすすべての関数)

が成り立つ.

考察その二の続き

$v(x)$ を $v(0)=v(1)=0$ を満たす任意の関数とすると,

$$F(\bar{y}+\varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$

$\left(\boxed{},\ v(0)=0,\ v(1)=0\right.$ を満たすすべての関数 $v)$

いま,$G(\bar{y}+v)=\displaystyle\int_0^1 \left[20\left\{\bar{y}(x)+v(x)\right\}+e^{2x}\left\{\bar{y}'(x)+v'(x)\right\}\right] dx = 1$

$$\iff \boxed{} = 0$$

$$\iff \int_0^1 \left(20-2e^{2x}\right) v(x)\, dx = 0 \text{（部分積分）}$$

より,

$$F(\bar{y}+\varepsilon v) \geq F(\bar{y})$$

$\left(\boxed{},\ v(0)=0,\ v(1)=0\right.$

を満たすすべての関数 $v)$

考察その二の続き

したがって,

$$\int_0^1 \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \, dx = 0$$

$\left(\int_0^1 \boxed{\qquad\qquad\qquad} \, dx = 0, \ v(0) = 0, \ v(1) = 0\right.$

を満たすすべての関数 v）

が成り立つ．ここで,

$$\int_0^1 \boxed{\qquad\qquad\qquad} \boxed{\qquad\qquad} \left(20 - 2e^{2x}\right) v(x) \, dx = 0$$

より,

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

を得る．いま

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

になるという関係に注意しておこう．

一般の制約の場合

先程の考察を一般化すると，制約式が

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx$$

のとき，局所最小解 $\bar{y}(x)$ に対するオイラー–ラグランジュ方程式の両辺の差は，ある実数 λ に対して

$$= \lambda \cdot$$

となることが示せる．$\frac{d}{dx}$ のある項を左辺に，$\frac{d}{dx}$ のない項を右辺に移項し，λ を $-\lambda$ に置き換えると

となる．

制約つき変分問題の最適性条件

[定理]

$$
\begin{aligned}
&\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\
&\textbf{制　約} \quad G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell \\
&\qquad\qquad\quad y(a) = A,\ y(b) = B
\end{aligned}
$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $DG(\bar{y})(\cdot)$ が正則ならば，ある実数 λ が存在して，$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ に対して，$\bar{y}(x)$ は

$$
(*) \quad \begin{cases} \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad\qquad} \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B \end{cases}
$$

を満たす．

制約つき変分問題の停留関数

Definition

定理で用いた

$$\tilde{f}(x, y, z) = \boxed{}$$

を **ラグランジュ関数** と呼ぶ.

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \\ \int_a^b g[y(x)]\,dx = \ell \\ y(a) = A, \ y(b) = B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を，問題 (2) における **停留関数** と呼ぶ．また，$(*)$ の微分方程式

$$\boxed{}$$

も，単に **オイラー–ラグランジュ方程式** と呼ぶ.

解法例

Example

制約付き変分問題

$$\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_0^1 y'(x)^2\, dx$$

$$\textbf{制　約} \quad G(y) := \int_0^1 y(x)\, dx = 1$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

停留関数を求めよ.

板書

練習問題

(1) **最小化** $F(y) := \displaystyle\int_0^{\pi} \{2y(x)\sin x + y'(x)^2\}dx$

制　約 $G(y) := \displaystyle\int_0^{\pi} y(x)dx = 1$

$y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

(2) **最小化** $F(y) := \displaystyle\int_0^{1} \{4y(x) + y'(x)^2\}\, dx$

制　約 $G(y) := \displaystyle\int_0^{1} xy(x)\, dx = \frac{1}{4}$

$y(0) = 0,\ y(1) = -1$