

# 最適化数学 第3回

## [今回の項目]

- ① 制約なし最適化問題
- ② 1 次の最適性条件
- ③ 停留点と局所最適解
- ④ 2 次の最適性条件
- ⑤ 局所最適解の求め方

# 最適化問題とは？

## 問題

平面に4点  $(1, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 7)$  が与えられたとき、これらの点の最も近くを通る直線は？

直線は  $y = ax + b$  と書け、点  $(1, 3)$  と直線との誤差は

$$3 - (1 \cdot a + b)$$

となる。同様に他の点との誤差を考え、それらの二乗の和を最小にする問題を考える。

**最小化**  $f(a, b) = \{3 - (a + b)\}^2 + \{5 - (2a + b)\}^2$   
 $+ \{5 - (3a + b)\}^2 + \{7 - (4a + b)\}^2$

**制約** なし

# 制約なし最適化問題

最小化  $f(x)$   
制約 なし

ここで、最小化する関数  $f(x)$  を  と呼ぶ.

関数を最大化する問題を最大化問題と呼び、最小化問題と最大化問題をまとめて、**最適化問題** と呼ぶ.

# 最適解の定義

## [定義]

$\bar{x}$  がすべての  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$f(x) \geq f(\bar{x})$$

のとき  $f(\bar{x})$  を **大域最小値**,  $\bar{x}$  を **大域最小解** と呼ぶ.

## [定義]

$\bar{x}$  に 十分近い すべての  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して

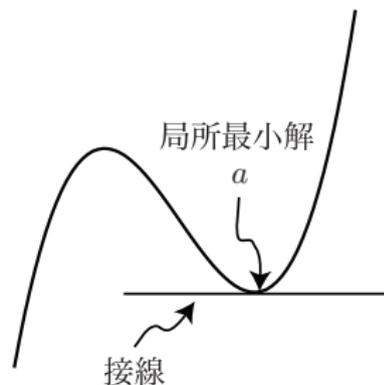
$$f(x) \geq f(\bar{x})$$

のとき  $f(\bar{x})$  を **局所最小値**,  $\bar{x}$  を **局所最小解** と呼ぶ.

不等号が逆だと **最大解**. 最小・最大解をまとめて最適解と呼ぶ  
微積で扱う極値との違いは教科書参照.

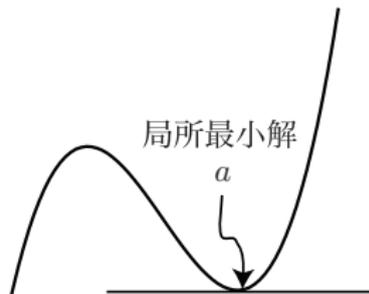
# 1 次最適性条件

$f(x)$  が 1 変数関数のとき,  
点  $a$  が局所最適解ならば,  
 $f'(a) = 0$  が成り立つ.



# 1 次の最適性条件

$f(x)$  が 1 変数関数のとき,  
点  $a$  が局所最適解ならば,  
 $f'(a) = 0$  が成り立つ.



## [定理] (一次の最適性条件)

$f(x)$  : **多変数関数**

点  $\bar{x}$  が局所最適解ならば,

が成り立つ.

## [定義]

点  $p$  が,  $\nabla f(p) = \mathbf{0}$  を満たすとき,  $p$  を  $f$  の  と呼ぶ.

# 停留点は最適解？

## [定理] (一次の最適性条件)

$f(x)$  : 多変数関数

点  $\bar{x}$  が局所最適解ならば,



が成り立つ.

**[解説]** . 局所最適解が存在すれば,  
定理より, それは常に停留点にな  
る. よって, 停留点をすべて見つければ最  
適解は必ずその中にある. このことから,  
停留点を見つけることは重要なのである.

停留点

局所最小解

大域最小解

# 停留点の幾何的イメージ

最小化  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$   
の局所最小解を  $(x, y) = (a, b)$  とする。

点  $(a, b)$  は局所最小解であるので、

「点  $(a, b, f(a, b))$  はグラフが下に窪んだ部分の  に位置している」



「窪みの一番底に接する平面は 」



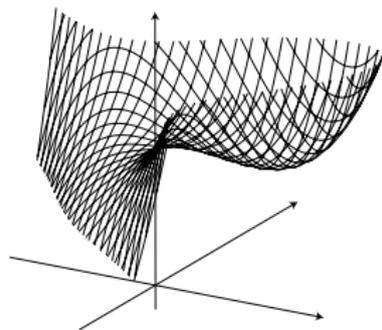
接平面

は  $(x, y)$  の値に関わらず、一定の値を取る。



$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

証明は教科書を参照。



# 練習問題

停留点を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$$

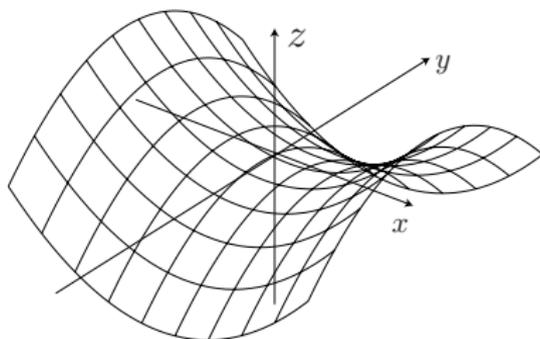
$$(2) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz - zx + x + y - 2z + 1$$

# 停留点であっても，局所最適解とは限らない

[例]

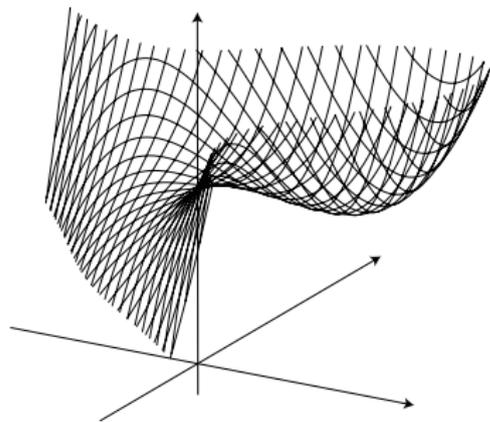
$$\text{最小化 } f(x, y) = x^2 - y^2$$

では  $\nabla f(0, 0) = \mathbf{0}$  となるが， $(0, 0)$  は局所最小解ではない．実際， $f(0, 0)$  と，点  $(0, 0)$  に近い点  $(x, y)$  での  $f$  の値を比べても， $f(0, 0)$  は最も小さい値にはなっていない．

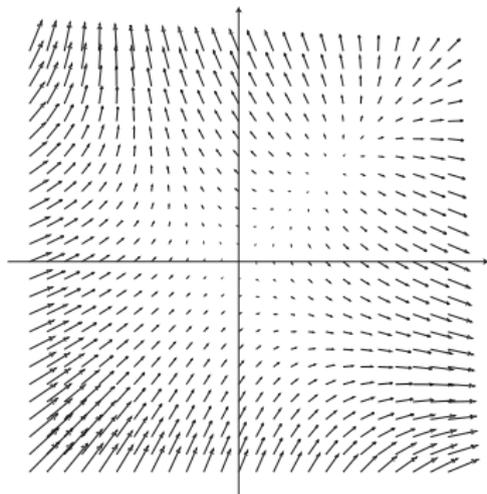


# どの停留点が局所最適解？

$$\text{最小化 } f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$



$x^3 - 3xy + y^3$  のグラフ



$x^3 - 3xy + y^3$  の



# ヘッセ行列を用いた判定法

停留点  $\bar{x}$  を局所最小解とすると,

$\bar{x}$  で『グラフは局所的に下に窪んでいる』

↔ 点  $\bar{x}$  の近くで関数  $f$  は

# ヘッセ行列を用いた判定法

停留点  $\bar{x}$  を局所最小解とすると,

$\bar{x}$  で『グラフは局所的に下に窪んでいる』

↔ 点  $\bar{x}$  の近くで関数  $f$  は

## [定理] (2次の最適性条件)

① (必要性)  $\bar{x}$  が局所最小解

$$\implies \nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} \text{ かつ } \nabla^2 f(\bar{x})$$

② (十分性)  $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$  かつ  $\nabla^2 f(\bar{x})$  が

$$\implies \bar{x} \text{ は局所最小解.}$$

③ (否定)  $\nabla^2 f(\bar{x})$  が  のとき,  $\bar{x}$  は局所最適解ではない.

局所最大解についても, それぞれ対応する箇所を半負定値, 負定値, 極大値に置き換えたものが成り立つ.

## 2 次の最適性条件の幾何的イメージ

[凸関数の復習]

任意の  $(x, y)$  について  $\nabla^2 f(x, y)$  が   $\Rightarrow f$  が狭義凸関数

[2 次の最適性条件]

$\nabla^2 f(a, b)$  が

$\Rightarrow (a, b)$  に近い  $(x, y)$  で  $\nabla^2 f(x, y)$  が

$\Rightarrow f$  が 「 $(a, b)$  の近くで 」

1 次の最適性条件と合わせると,

$\nabla f(a, b) =$   かつ  $\nabla^2 f(a, b)$  が

$\Rightarrow (a, b)$  は  $f$  の 「」 な部分の底にある

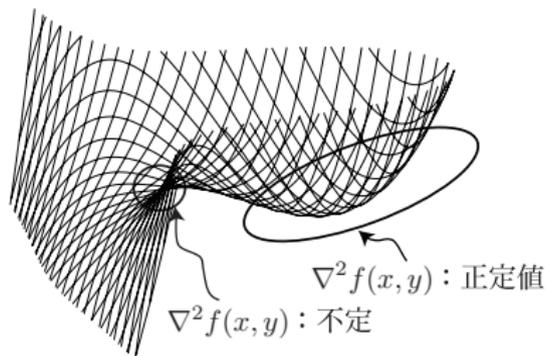
$\Rightarrow (a, b)$  は

## 2 次の最適性条件の幾何的イメージ

ヘッセ行列  $\nabla^2 f(a, b)$  が  ( $|\nabla^2 f(a, b)| < 0$ )

$\Rightarrow f$  が  $(a, b)$  の近くで凸関数にも凹関数にならず、  
グラフが捻れている

$\Rightarrow (a, b)$  は



# 例題

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

の局所最適値を求めよ.

# 練習

局所最適解を求めよ.

$$(1) f(x, y) = x^2 - 3y^2 + y^3$$

$$(2) f(x, y) = x^3 + 5x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 3x - 3y + 1$$

$$(3) f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 4y^3 - 3x + 1$$

$$(4) f(x, y, z) = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 + xz - 3x - 6y - 3z$$