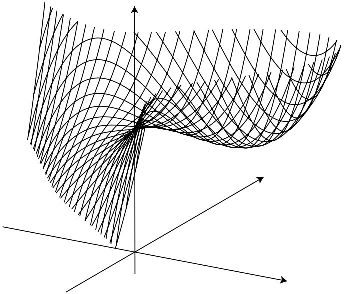
最適化数学 第 4 回

［今回の項目］

1. 復習：局所最適解の求め方
2. 問題練習

復習：制約なし最適化問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{最小化} & f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 \\
\text{制約} & \text{なし}
\end{array}
$$



$x^3 - 3xy + y^3$ のグラフ

復習：1 次の最適性条件

［定理］（一次の最適性条件）

$f(x)$：多変数関数
点 $\bar{x}$ が局所最適解ならば,

$$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} \quad \text{（零ベクトル）}$$

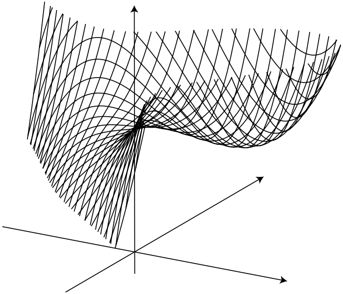
が成り立つ.

［定義］

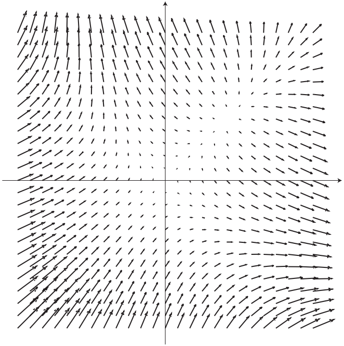
点 p が，$\nabla f(p) = \mathbf{0}$ を満たすとき，p を f の停留点と呼ぶ.

復習：停留点

最小化　$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$



$x^3 - 3xy + y^3$ のグラフ



$x^3 - 3xy + y^3$ の勾配ベクトル

復習：ヘッセ行列を用いた判定法

停留点 $\bar{x}$ を局所最小解とすると，

$\bar{x}$ で『グラフは局所的に下に窪んでいる』

$\longleftrightarrow$ 点 $\bar{x}$ の近くで関数 f は『局所的に凸関数である』

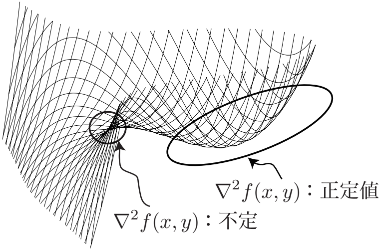
［定理］（2 次の最適性条件）

1. （必要性）$\bar{x}$ が局所最小解
$\Longrightarrow \nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ かつ $\nabla^2 f(\bar{x})$ が半正定値
2. （十分性）$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ かつ $\nabla^2 f(\bar{x})$ が正定値
$\Longrightarrow \bar{x}$ は局所最小解.
3. （否定）$\nabla^2 f(\bar{x})$ が不定値のとき，$\bar{x}$ は局所最適解ではない.

局所最大解についても，それぞれ対応する箇所を半負定値，負定値，極大値に置き換えたものが成り立つ.

復習：2 次の最適性条件の幾何的イメージ

- （十分性）$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ かつ $\nabla^2 f(\bar{x})$ が正定値
  $\Longrightarrow$ $\bar{x}$ は局所最小解.
- （否定）$\nabla^2 f(\bar{x})$ が不定値のとき，$\bar{x}$ は局所最適解ではない.



例題

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

の局所最適値を求めよ．

[補足]

- $\nabla f(\bar{x})$ が正定値
  $\iff \nabla f(\bar{x})$ の固有値がすべて正
- f が 2 変数の場合：
  $\det\left[\nabla^2 f(\bar{x})\right] > 0$（行列式），かつ $f_{xx}(\bar{x}) > 0 \Longrightarrow f$ は正定値

例題

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x - 6y$$

の局所最適値を求めよ．

（解答例） $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 6 \\ 3y^2 - 6 \end{bmatrix}$，$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$ より，

連立方程式 $\begin{cases} 3x^2 - 6 = 0 \\ 3y^2 - 6 = 0 \end{cases}$ を解くと，停留点 $(x,y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

（順不同）を得る．

(x,y)	$(\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$
$\lvert\nabla^2 f(x,y)\rvert$	$+$	$+$	$-$
$f_{xx}(x,y)$	$+$	$-$	
	小	大	不定
$f(x,y)$	$-8\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	

である．よって，$(x,y) = (\sqrt{2},\sqrt{2})$ のとき，局所最小値 $-8\sqrt{2}$，
$(x,y) = (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ のとき，局所最大値 $8\sqrt{2}$ をとる．

練習問題

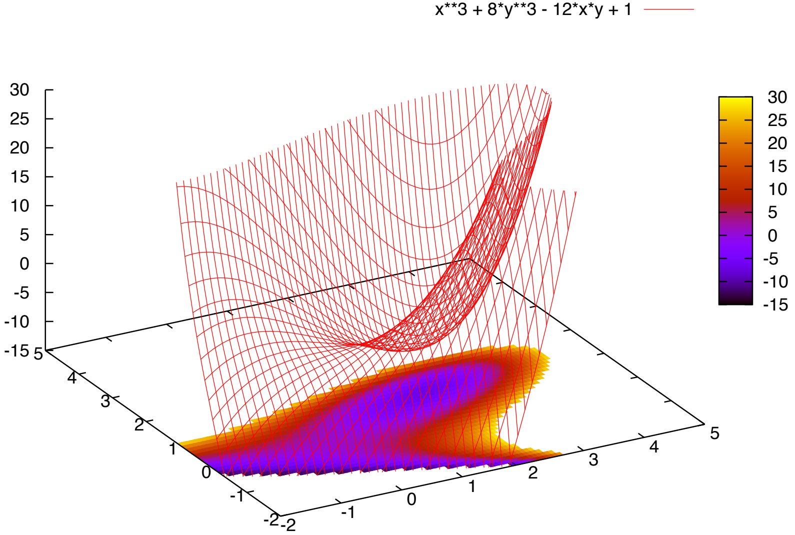
$$
\begin{aligned}
&(1) \quad f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 12xy + 1 \\
&(2) \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x
\end{aligned}
$$

練習問題

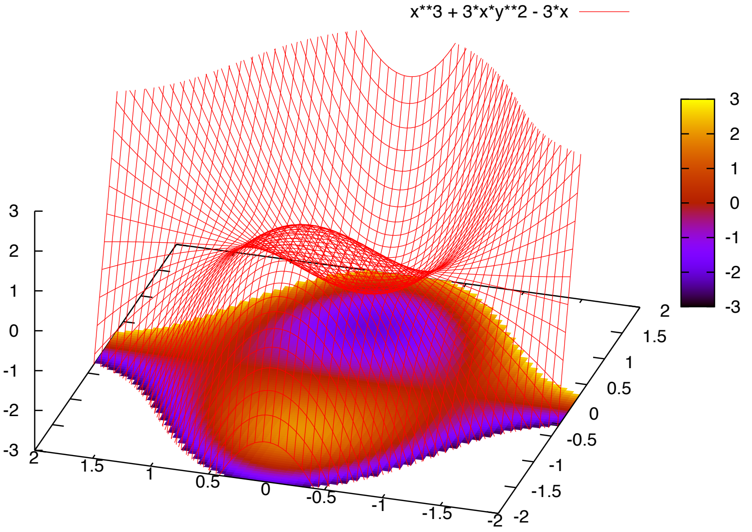
$$(3) \quad f(x,y) = x^4 - 4x^2 + 8y^2 + 4x^2y$$

$$(4) \quad f(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^2 + 3y^2 + 3xy - 3x - 3y - 3z + 2$$

$$(1) \quad f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 12xy + 1$$



(2) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$



(3) $f(x, y) = x^4 - 4x^2 + 8y^2 + 4x^2y$