

# 最適化数学 第7回

## [今回の項目]

- ① 等式制約が複数ある場合
- ② 不等式制約問題
- ③ 等式・不等式制約

# 復習：等式制約が二つある場合

## [定理]

**最小化**  $f(x)$

**制約**  $g_1(x) = 0, g_2(x) = 0$

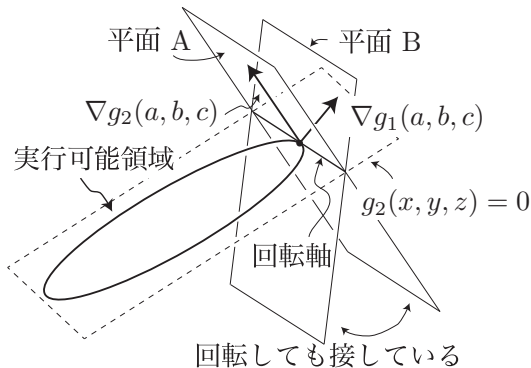
に対して、 $\bar{x}$  を局所最小解とする.  $\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})$  が一次独立ならば、ある数  $\lambda_1, \lambda_2$  が存在して、以下が成り立つ：

$(a, b, c)$  は局所最小解

⇒ 局所最小解で目的関数の等高面と実行可能領域は接する

⇒  $\nabla f(a, b, c) = \lambda_1 \nabla g_1(a, b, c) + \lambda_2 \nabla g_2(a, b, c)$

# 実行可能領域と接する平面



実行可能領域に接する平面の法線ベクトルは、回転させた平面のものも含めて、

と書ける。

# 例題

**最小化**  $f(x, y, z) = x + y + z$   
**制約**  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$   
 $g_2(x, y, z) = x - y + z = 0$

# 練習問題

**最小化**  $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$   
**制約**  $g_1(x, y, z) = x^2 + z^2 - 25 = 0$   
 $g_2(x, y, z) = -x + 2y - 3z = 0$

# 復習：不等式が一つの場合

(P) 最小化  $f(x, y)$

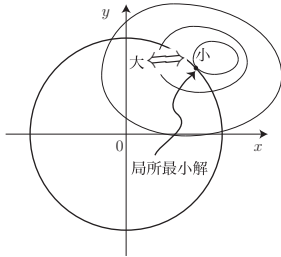
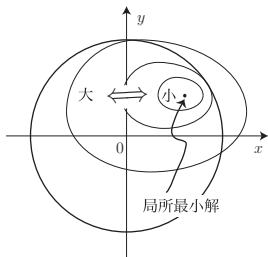
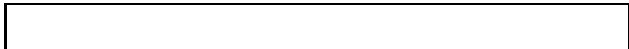
制約  $g(x, y) \leq 0$

$(a, b)$  を局所最小解とすると、次の二つの場合が考えられる：

①  $(a, b)$  が実行可能領域の内部にある ( $g(a, b) < 0$ ) 場合:



②  $(a, b)$  が実行可能領域の境界にある ( $g(a, b) = 0$ ) 場合:



最小化  $f(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$   
制約  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

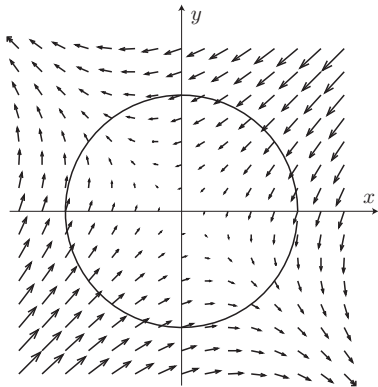


Figure: 点  $(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$  で  $-\nabla f(x, y)$  が  を向いている.

# KKT 条件

上記二つの場合をまとめて書くと,

[定理]

最小化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{制約} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

に対して,  $\bar{x}$  が局所最小解であり,  $\nabla g(\bar{x}) \neq \mathbf{0}$  ならば, ある数  $\lambda$  が存在して, 以下が成り立つ:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$



# 不等式が複数ある場合

**最小化**  $f(x)$

**制約**  $g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0$

$\bar{x} = (a, b)$  を局所最小解とすると、以下の 4 つの場合がある：

- ①  $g_1(\bar{x}) < 0, g_2(\bar{x}) < 0 \longrightarrow$  制約なし
- ②  $g_1(\bar{x}) = 0, g_2(\bar{x}) < 0 \longrightarrow$  制約：
- ③  $g_1(\bar{x}) < 0, g_2(\bar{x}) = 0 \longrightarrow$  制約：
- ④  $g_1(\bar{x}) = 0, g_2(\bar{x}) = 0 \longrightarrow$  制約：

最小化  $f(x)$

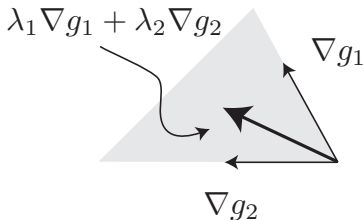
制約  $g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0$

$\bar{x} = (a, b)$  が  $g_1(\bar{x}) = 0, g_2(\bar{x}) = 0$  を満たす場合：  
このとき、ある実数  $\lambda_1, \lambda_2$  が存在して、

かつ

が成り立つ。

**解説：**  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$  のとき、 $\lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$  と書ける領域は以下である：



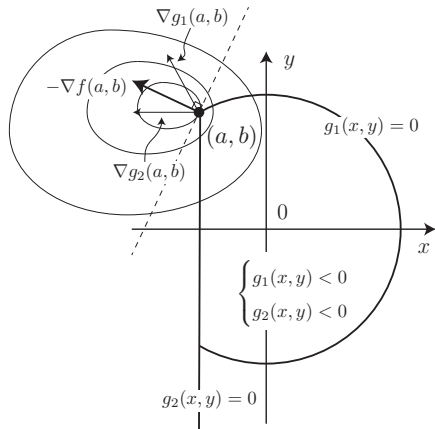


Figure: 目的関数の勾配ベクトルが制約式の勾配ベクトルに  . 破線は等高線の接線である.

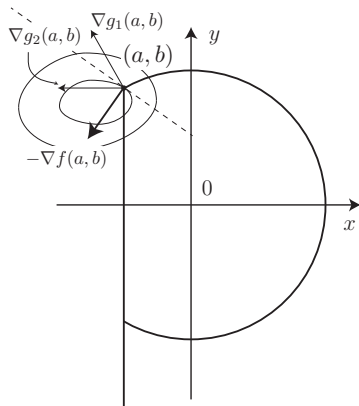


Figure: 制約式の勾配ベクトルに  . このとき目的関数の等高線と実行可能領域の境界は交わる.

# KKT 条件

## [定理]

最適化問題

**最小化**  $f(x)$

**制約**  $g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0$

に対して,  $\bar{x}$  が局所最小解であり,  $\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})\}$  が一次独立であるとする. すると, ある数  $\lambda_1, \lambda_2$  が存在して,

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\bar{x}) + \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_1 g_1(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_2 g_2(\bar{x}) = 0 \end{array} \right.$$

が成り立つ.

# 制約に不等式と等式がある場合

## [定理] (KKT 条件)

最適化問題

$$\text{最小化 } f(x)$$

$$\text{制約 } g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0, h(x) = 0$$

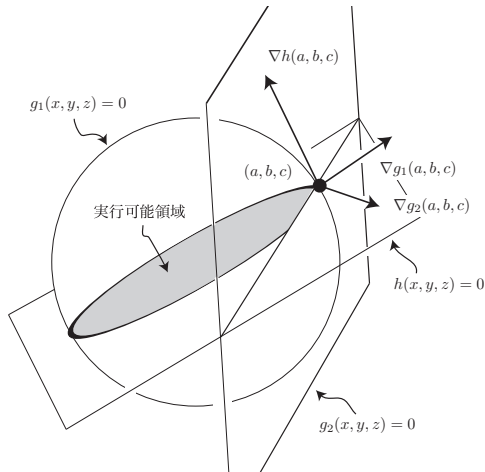
に対して,  $\bar{x}$  が局所最小解であり  $\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x}), \nabla h(\bar{x})\}$  が一次独立であるとする. すると, ある数  $\lambda_1, \lambda_2, \mu$  が存在して,

$$(KKT \text{ 条件}) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}) + \mu \nabla h(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_1 g_1(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_2 g_2(\bar{x}) = 0 \end{array} \right.$$

が成り立つ.

(例) 最小化  $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$

制約 
$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x, y, z) = -x - 1/2 \leq 0 \\ h(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

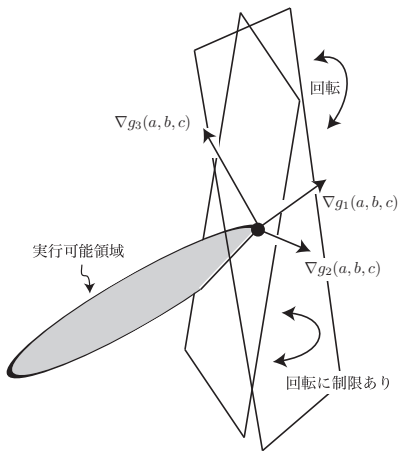


(例) 最小化  $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$

$$\text{制 約} \quad \begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x, y, z) = -x - 1/2 \leq 0 \\ h(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- 1 点  $(a, b, c)$  が空間内の円の内側にある場合：
- 2 点  $(a, b, c)$  が空間内の円の境界にある場合：
- 3 点  $(a, b, c)$  が実行可能領域の角張ったところにある場合：

以下で説明



となる.



# KKT 条件の例

## Example

最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x, y, z) := (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \\ \text{制約} & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ & 4x + y + 2z = 2 \end{array}$$

の KKT 条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} - \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ 2y - 6 \\ 2z - 8 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \lambda \geq 0, \mu : \text{任意} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0, 4x + y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right.$$

## 練習問題

KKT 条件を求めよ.

$$\text{最小化 } 3x^2 - 8xy + 3y^2$$

$$\text{制約 } x + 2y \leq 8, \quad 3x + y \leq 9$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$