最適化数学

関口 良行

導入：最適化問題とは？

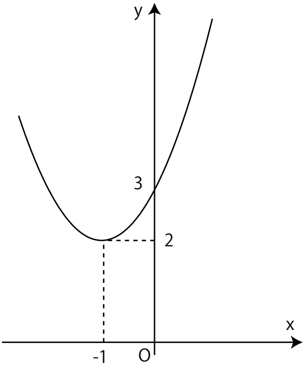
関数の最小値，又は最大値を探す.

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ の最小値は？

（解）

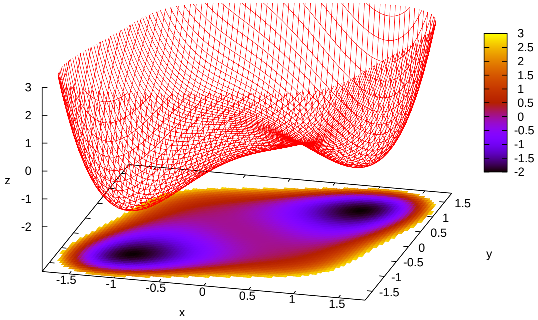
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 2x + 3 \\
&= (x+1)^2 + 2 \text{ より，}
\end{aligned}
$$

最小値は 2,
最小解は $x = -1$.



多変数関数

$$z = x^4 + y^4 - (x+y)^2$$

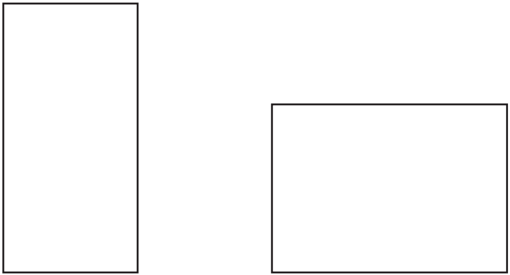


$(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$ で最小値 -2 をとる

多変数関数の微分と行列式を使えば解ける！

最適なかたち

辺の長さが一定の長方形の中で，面積が最大になるのはどのような場合か？



最適なかたち

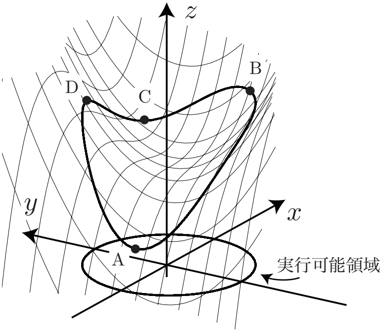
辺の長さが一定の長方形の中で，面積が最大になるのはどのような場合か？

数式で表すと

$$\begin{aligned}&\text{最大化}\ xy\\&\text{制約式}\ x+y=a\ (\text{定数}), x\geq 0, y\geq 0\end{aligned}$$

これを解くと，正方形 が面積を最大にすることがわかる．

多変数関数の最小値



2 変数関数を円周上で最小化する問題を考える：

$$\text{最小化}\ x^3 - xy + y^2 + 2$$
$$\text{制約}\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

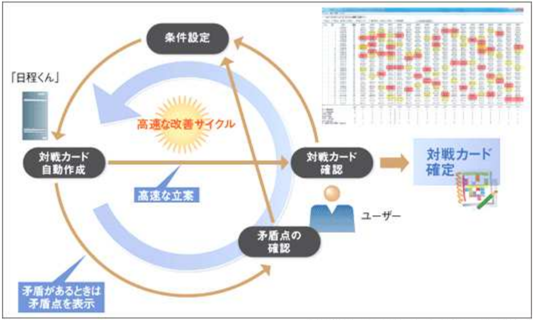
このような図がないとき，計算によって最適解を見つけるにはどうしたらよいだろうか？

最適化問題の応用例：微分と線形代数

経営工学

1. Ｊリーグの試合日程作成
   （2014 年，新日鉄住金ソリューションズ）
2. P&G の在庫管理最適化
   （2009 年に 1500 億円のコスト削減）

■日本プロサッカーリーグ(Jリーグ)が刷新した「日程くん」の概要



「日程くん」は日本プロサッカーリーグ社内システムの通称

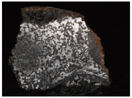
Toy Problem; 工場を経営する

製品 X (8 万円) | アルミ | 鉄 | 鉄 | 鉄

製品 Y (6 万円) | アルミ | 鉄

アルミ 4 kg

鉄 6 kg



さて製品 X, Y をいくつづつ作れば利益が最大になるでしょう？

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	1 kg	1 kg	4 kg
鉄	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

線形計画問題

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	1 kg	1 kg	4 kg
鉄	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

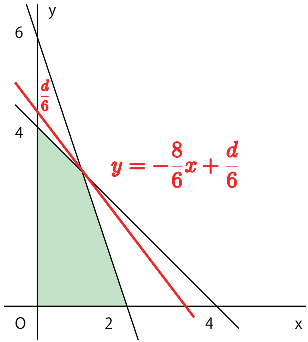
製品 X を x 個
製品 Y を y 個 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\text{最大化 } 8x + 6y \text{ (利益)} \\ &\text{制約式 } 1x + 1y \leq 4 \text{ (アルミの在庫)} \\ &\qquad\quad 3x + 1y \leq 6 \text{ (鉄の在庫)} \\ &\qquad\quad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

例えば，製品 X を 2 個, 製品 Y を 0 個作るとすると，材料の在庫はちゃんと足りていて（鉄を使い切る），利益は $8 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = 16$ となる．これは最大値？

答え

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & 8x + 6y \\ \text{制約式} \quad & x + y \leq 4 \\ & 3x + y \leq 6 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$



$8x + 6y = d$ とおくと，$y = -\frac{8}{6}x + \frac{d}{6}$ となるので，図より $x = 1, y = 3$ のとき，最大値 $8 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 26$ となる．

製品 X を 1 個と製品 Y を 3 個作ると利益が最大になる．

裏問題

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

解 $x = 1$,$y = 3$, 最大値 26

裏問題

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

[裏問題]

最小化 $4s + 6t$

制約式 $s + 3t \leq 8$

$s + t \leq 6$

$s, t \geq 0$

解 $x = 1$,$y = 3$, 最大値 26

裏問題の解は $s = 5, t = 1$ で最小値 26 をとる.

表問題の最大値と一緒！

最適化問題には最適値が一致するような
裏問題がある！

裏問題の役割

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	1 kg	1 kg	4 kg
鉄	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$ $+1?$

$3x + y \leq 6$ $+1?$

$x, y \geq 0$

裏問題の解

$s = 5, t = 1$

Q. もし出来るとしたら, アルミと鉄のどちらの在庫を増やした方が利益が大きくなるか?

裏問題の役割

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	1 kg	1 kg	4 kg
鉄	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

裏問題の解
$s = 5, t = 1$

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$ $+1$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

Q. もし出来るとしたら, アルミと鉄のどちらの在庫を増やした方が利益が大きくなるか?

答え アルミ

理由　アルミの在庫を 1 kg 増やすと最大利益は 5 万円 増える. 鉄の場合は 1 万円 しか増えない.
(注意: 製品数に小数点を用いる)

裏問題の役割

	製品 X	製品 Y	在庫
アルミ	1 kg	1 kg	4 kg
鉄	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

裏問題の解

$s = 5, t = 1$

[表問題]

最大化 $8x + 6y$

制約式 $x + y \leq 4$ $+1$

$3x + y \leq 6$

$x, y \geq 0$

Q. もし出来るとしたら, アルミと鉄のどちらの在庫を増やした方が利益が大きくなるか?

答え アルミ

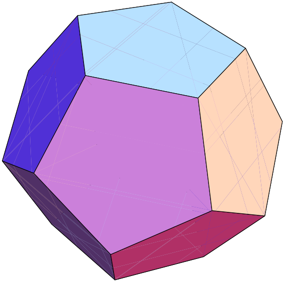
理由　アルミの在庫を 1 kg 増やすと最大利益は 5 万円 増える. 鉄の場合は 1 万円 しか増えない.

(注意: 製品数に小数点を用いる)

多面体

実際には、線形計画問題の変数の数はもっと多い（数千個）

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
\text{制約式} & x_1 + x_3 \leq 2 \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

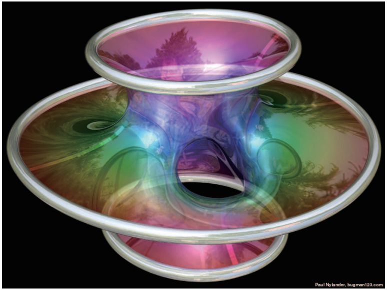


多面体の性質を用いて解く！
(線形代数と離散数学)

最適化問題の応用例：微分と積分

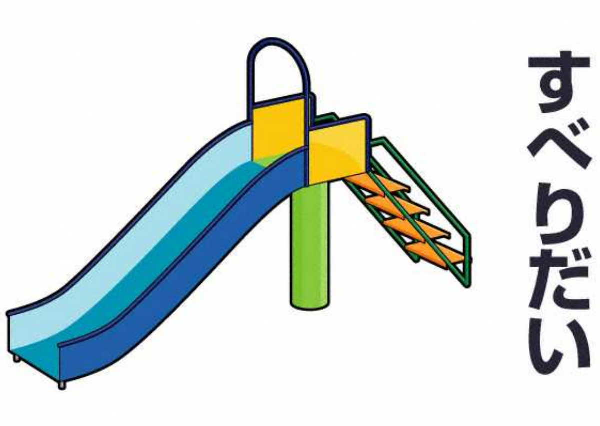
物理工学

1. 垂れ下がる縄の形（懸垂線）
2. 石鹸膜の形（極小曲面）
3. 物理法則 $\leftrightarrow$ ある物理量の最小化問題



最速滑り台

どのような形の滑り台が最も早く滑れるか？ただし到達点は指定されている (真っ直ぐ降りるのではない)



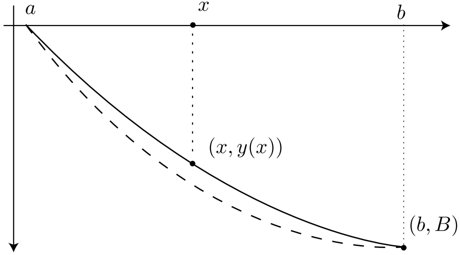
出典: 情報処理推進機構

変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで滑り台の形を表す. 重力による加速度を g とおくと, 高さ y のときの速度 v は, エネルギー保存則より $mv^2/2 = mgy$ を満たすので $v = \sqrt{2gy}$ となる.

よって, 移動時間は

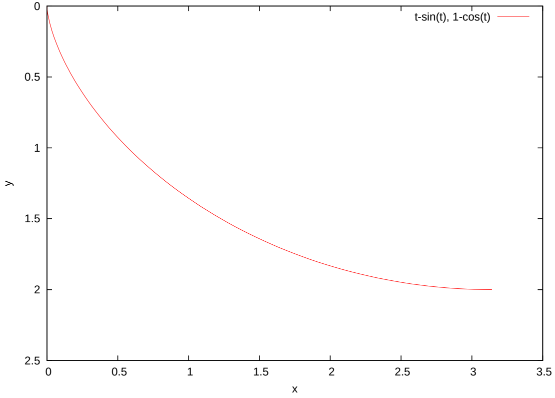
$$F(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}}\, dx$$



となる. この積分値を最小にする関数 $y(x)$ のグラフが最速滑り台の形を表す. ($F(y)$ を y で微分して得られる微分方程式を解く)

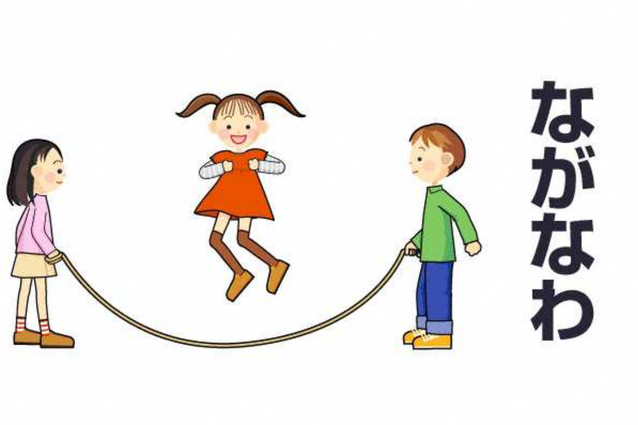
最速滑り台のかたちは,

$$\text{サイクロイド}\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t - \cos t \end{cases}$$



長縄のかたち

二人の人が, 地面につかないように長縄を持ったとき, 長縄はどのような形で垂れ下がるか？



出典: 情報処理推進機構

変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで縄の形を表す．縄の両端の高さを h, 長さを l, 密度を m とする．両端の座標を (a,h), (b,h) とする．縄は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$F(y) = \int_a^b \left(m\sqrt{1+y'(x)^2} g y(x) \right) dx$$

を, 曲線の長さ（ $y(x)$ のグラフの一部分）が,

$$\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\, dx = \ell$$

かつ，両端が $y(a)=y(b)=h$ を満たすという条件のもとで, $F(y)$ を最小にする関数 $y(x)$ を見つければよい．

長縄のかたちは,

$$\text{懸垂線}\quad y(x) = \frac{e^{\frac{x+d}{c}} + e^{-\frac{x+d}{c}}}{2c} - \lambda$$
$$= \frac{1}{c}\cosh\left(\frac{x+d}{c}\right) - \lambda$$

（双曲線関数）

（c, d, λ は縄の長さ, 密度, 両端の高さ, 位置などで決まる定数）