最適化数学　自習問題　（担当：関口 良行）

1. 自習用の問題です．テスト勉強に役立ててください．
2. 答えは教科書に載っています．
3. 試験は手書きの $A4$ 一枚のみ持ち込み可能です．(コピーは不可)

制約なし最適化問題

1. 次の関数の停留点を求めよ．

$$(1)\ f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$$
$$(2)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 6zy - 2x - 2y + 2z$$

2. 局所最適値（極値）を求めよ．

$$(1)\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1 \qquad (2)\ f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$$
$$(3)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz - zx + x + y - 2z + 1$$
$$(4)\ f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x \quad (5)\ f(x,y) = 2x^4 - 2x^2 + y^2 + 2x^2y$$

制約つき最適化問題

1. 最適化問題の局所最適解を求めよ．また大域最適解が求まるときは求めよ．

(1) 最小化 $f(x,y) = 2x - 3y$
　制　約 $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$

(2) 最小化 $f(x,y) = x^3 + y^3$
　制　約 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

(3) 最小化 $f(x,y,z) = x + y + z$
　制　約 $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$
　　　　$g_2(x,y,z) = x - y + z = 0$

2. x, y が原点を中心とする半径 1 の円周上の点であるとき, $2x^2 - 6xy + 2y^2$ の最小値と最大値を求めよ．

3. 以下の最小化問題の最小値を求めよ．ただし以下の問題はすべて最小解を持つ．

(1) 最小化 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$
　制　約 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

(2) 最小化 $f(x,y) = xy$
　制　約 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

4. 以下の最小化問題の KKT 条件を求めよ（解は求めなくてよい）．

最小化　$x - y + 2z$
制　約　$x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 \leq 0$
　　　　$2x + 2y + z - 1 = 0$

裏面へ続く

線形計画問題

以下の線形計画問題に単体法を用いて最適解を求めよ.

(1) 最小化 $-8x_1 - 6x_2$

制　約

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &\le 4 \\ 3x_1 + \ x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(2) 最小化 $-3x_1 - 2x_2 - 4x_3$

制　約

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + 2x_3 &\le 4 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &\le 5 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 &\le 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

変分問題

1. 変分問題の停留関数を求めよ.

(1) 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^1 \left\{2xy(x) + y'(x)^2\right\} dx$

制　約 $y(0) = 1,\ y(1) = 0$

(2) 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^1 \{-2e^x y(x) + y'(x)^2\} dx$

制　約 $y(0) = 0,\ y(1) = 0$

(3) 最小化 $F(y) = \displaystyle\int_0^1 (1 + x^2) y'(x)^2 \, dx$

制　約 $y(0) = 1,\ y(1) = 0$

2. 次の制約つき変分問題の停留関数を求めよ.

(1) 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^1 \left\{y(x) + \frac{1}{4} y'(x)^2\right\} dx$

制　約 $G(y) := \displaystyle\int_0^1 y(x)\, dx = 2$

$y(0) = 1,\ y(1) = 0$

(2) 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^1 y'(x)^2 \, dx$

制　約 $G(y) := \displaystyle\int_0^1 xy'(x)\, dx = 5$

$y(0) = 1,\ y(1) = 10$

(3). 最小化 $F(y) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(x)^2 \, dx$

制　約 $G(y) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(x) \sin x \, dx = \frac{7}{8}\pi^2$

$y(0) = \pi/2,\ y(\pi/2) = \pi^3/2$