

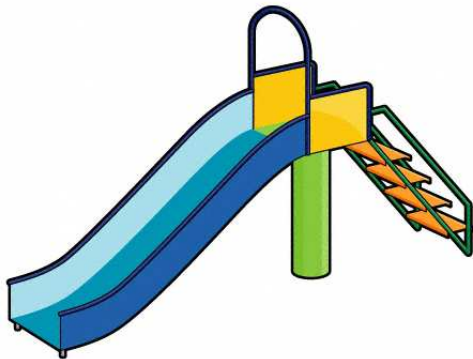
# 最適化数学 第 11 回

## [今回の項目]

- ① 変分問題の例
- ② 最小解の定義
- ③ 汎関数
- ④ 方向微分

# 最速滑り台

どのような形の滑り台が最も早く滑れるか？ただし到達点は指定されている (真っ直ぐ降りるのではない)



すべりだい

出典: 情報処理推進機構

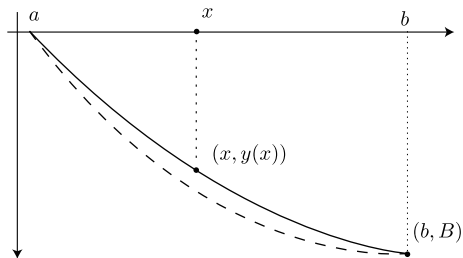
# 変分問題

関数  $y(x)$  のグラフで滑り台の形を表す. 重力による加速度を  $g$  とおくと, 高さ  $y$  のときの速度  $v$  は, エネルギー保存則より  $mv^2/2 = mgy$  を満たすので  $v = \sqrt{2gy}$  となる.

よって, 移動時間は

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx$$

となる. この積分値を最小にする関数  $y(x)$  のグラフが最速滑り台の形を表す.



# 長縄のかたち

二人の人が、地面につかないように長縄を持ったとき、長縄はどのような形で垂れ下がるか？



ながなわ

出典: 情報処理推進機構

# 制約付き変分問題

関数  $y(x)$  のグラフで縄の形を表す. 縄の両端の高さを  $h$ , 長さを  $l$ , 密度を  $m$  とする. 両端の座標を  $(a, h), (b, h)$  とする. 縄は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$\int_a^b \left( m \sqrt{1 + y'(x)^2} g y(x) \right) dx$$

を, 長さ

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \ell$$

両端  $y(a) = y(b) = h$  という条件のもとで最小にする関数  $y(x)$  を見つければよい.

## 簡単な変分問題

$$\text{最小化 } F(y) = \int_0^1 \{y(x) - 1\}^2 dx$$

制約 なし

汎関数  $F$  に具体的な関数を代入して、値を計算する。

$$y_1(x) = x \text{ のときは } F(y_1) = \int_0^1 \left\{ \boxed{\phantom{000000}} \right\}^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$y_2(x) = x^2 \text{ のときは } F(y_2) = \int_0^1 \left\{ \boxed{\phantom{000000}} \right\}^2 dx = \frac{8}{15}$$

よって、 $F$  の値を比べると

$$F(y_2) \boxed{\phantom{00}} F(y_1)$$

となる。それでは、

$F(y)$  の値を一番小さくするのはどのような関数  $y(x)$  か？

# 発見的に最小解を見つける

$$\text{最小化 } F(y) = \int_0^1 \{y(x) - 1\}^2 dx \quad \text{制 約 なし}$$

さて、この問題に関しては推測で解を見つけることができる。ここで、鍵となるのが積分に関する以下の性質である：

$$\text{区間 } [a, b] \text{ で } f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \quad \boxed{\phantom{0}}$$

これより、汎関数  $F$  の値はすべての関数  $y(x)$  に対して 0 以上となる。そこで、 $F$  の値を 0 にするような  $y(x)$  を探す。いま

$$\bar{y}(x) = \boxed{\phantom{0}}$$

とおくと、 $F(\bar{y}) = \boxed{\phantom{0}}$  なので、すべての  $y(x)$  に対して

$$F(y) = \int_0^1 \{y(x) - 1\}^2 dx \geq \boxed{\phantom{0}}$$

が成り立つ。したがって、 $\bar{y}(x) = \boxed{\phantom{0}}$  は最小解となる。

# 関数の微分に依存する汎関数

変分問題に慣れるために、次の問題も推測で解いてみよう。

$$\text{最小化 } F(y) = \int_1^2 \{y'(x) - 1\}^2 dx$$

$$\text{制約 } y(1) = 2, y(2) = 3$$

さて、この汎関数  $F$  も、すべての  $y(x)$  に対して 0 以上となる。

まず、 $F$  の値を 0 にするには、明らかに

$$y'(x) = \boxed{\phantom{0}}$$

となればよい。また、制約より

$$y(1) = 2, y(2) = 3$$

も必要である。

この二つを満たす関数を探すと

$$\bar{y}(x) = \boxed{\phantom{0}}$$

よって、 $y(1) = 2, y(2) = 3$  を満たすすべての関数  $y(x)$  に対して、 $\bar{y}(x) = \boxed{\phantom{0}}$  は最小解となる。



# 変分問題の一般形

変分問題の一般形は、汎関数  $F(y)$  を用いて

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & F(y) \\ \text{制約} & y \in C \end{array} \quad (1)$$

のように書ける。ここで、 $F(y)$  を  と呼ぶ。また、 $y \in C$  とは、関数  $y(x)$  が関数の集合  $C$  に入っていることを表す。

## Definition

関数  $\bar{y}(x) \in C$  がすべての関数  $y(x) \in C$  に対して  $F(y) \geq F(\bar{y})$  を満たすとき、 $\bar{y}(x)$  を問題 (1) の **大域最小解** と呼ぶ。

## Definition

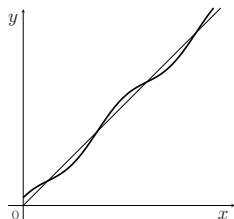
関数  $\bar{y}(x) \in C$  が  $\bar{y}(x)$  に十分「近い」すべての関数  $y(x) \in C$  に対して  $F(y) \geq F(\bar{y})$  を満たすとき、 $\bar{y}(x)$  を問題 (1) の **局所最小解** と呼ぶ。

# 関数の近さ

関数  $\bar{y}(x)$  に「近い」関数とは、 $y(x)$  とグラフが近い関数のことを指す。例えば、関数  $v(x)$  と十分小さい数  $\varepsilon$  に対して



という関数を考えると、この関数のグラフは  $\bar{y}(x)$  のグラフが少し変化したものになっているので、 $\bar{y}(x)$  に「近い」関数である (図 1)。



**Figure:** 細い線が  $y(x) = x$ , 太い線が  $y(x) = x + 0.04 \cos(4\pi x)$  のグラフ

# 制約を満たし「近い」関数

さらに制約

$$y(0) = 0, y(1) = 1 \quad (2)$$

を考える. いま  $\bar{y}(x)$  は,  
制約を満たすとす. このとき, 制約 (2)  
を満たし, 関数  $\bar{y}(x)$  に「近い」関数と  
はどのようなものだろうか? この場合は

$$v(0) = \square, v(1) = \square$$

を満たす  $v(x)$  と十分小さい数  $\varepsilon$  に対して

$$\square$$

とすればよい. すると,

$$\bar{y}(0) + \varepsilon v(0) = \square, \quad \bar{y}(1) + \varepsilon v(1) = \square$$

となるので, 関数  $\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)$  は, 制約 (2) を満たし, グラフが  
 $\bar{y}(x)$  に「近い」関数である (図 2).

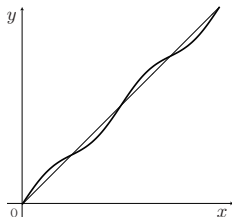


Figure: 細い線が  
 $y(x) = x$ , 太い線が  
 $y(x) = x + 0.04 \sin(4\pi x)$   
のグラフ. 端が一致して  
いることに注意

# 被積分関数

本講義では、3変数関数  $f(x, y, z)$  に対して、

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

と定義される汎関数を扱う。この  $f(x, y, z)$  を **被積分関数** と呼ぶ。被積分関数とは単に「積分される関数」という意味だが、本講義では汎関数の定義に使われるこの  $f(x, y, z)$  を指す言葉として使う。

## Example

$\int_0^1 \{y(x) - 1\}^2 dx$  の被積分関数は

$$f(x, y, z) = \boxed{\phantom{y(x) - 1}}$$

である。

## Example

$\int_a^b \left\{ y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2 \right\} dx$  の被積分関数は

$$f(x, y, z) = \boxed{\phantom{y(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2}}$$

である。

## [練習問題]

以下の汎関数の被積分関数  $f(x, y, z)$  を求めよ.

$$(1) F(y) = \int_0^1 \{xy(x) + y'(x)^3\} dx$$

$$(2) G(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

# 被積分関数の省略記号

汎関数を表すときなどに、常に  $f(x, y(x), y'(x))$  と書くと表記が煩雑になるので、関数の括弧に “[ ]” を用いて

$$f(x, y(x), y'(x)) = f[y(x)]$$

と表すことにする。右辺には  $y'$  が書かれていないが、 $x$  と関数  $y(x)$  が決まれば  $y'(x)$  も決まるので、このように省略をしても差し支えない。この省略記号を使うと

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_a^b \boxed{\phantom{f(x, y(x), y'(x))}} dx$$

とすっきり書ける。

# 汎関数の微分

推測で解を見つけられる問題は非常に特殊な問題に限られる。数ベクトル上の最適化問題と同様に、変分問題でも汎関数の微分を用いて、最適解を見つける一般的な方法がある。

1 変数関数の場合、微分係数とは変数を少し変化させたときに関数値が変化する割合（瞬間変化率）を指した。汎関数の微分も、

**関数を少し変化させたときに汎関数値が変化する割合  
(瞬間変化率)**

のようなもので定義したい。

# 汎関数値の変化量

$$F(y) = \int_0^1 y(x)^2 dx$$

を考える。関数  $y(x)$  を「少し変化させる」とは、関数  $v(x)$  と小さい数  $\varepsilon$  に対して、

$$y(x) \rightarrow \boxed{\phantom{y(x)}}$$

とすることを指すこととする。このとき、汎関数  $F(x)$  の値がどのように変化するかを調べてみよう。いま、汎関数値の変化量は

$$\boxed{\phantom{F(y + \varepsilon v) - F(y)}}$$

となる。

**例：**  $y(x) = x^2$ ,  $v(x) = x^3$  に対して、

$$y(x) = x^2 \rightarrow y(x) + \varepsilon v(x)$$

$$= \boxed{\phantom{y(x) + \varepsilon v(x)}}$$

とすると、

$$F(y + \varepsilon v) - F(y)$$

$$= \int_0^1 \left( \boxed{\phantom{y(x) + \varepsilon v(x)}} \right)^2 dx - \int_0^1 \left( \boxed{\phantom{y(x)}} \right)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 + 2\varepsilon x^5 + \varepsilon^2 x^6 - x^4) dx$$

$$= \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{7}\varepsilon^2$$

を得る。これが汎関数値の変化量である。



# 汎関数値の擬似的な変化率

次に、この関数の変化に対する汎関数値の平均変化率  
 $\frac{\text{(汎関数 } F \text{ の変化量)}}{\text{(関数 } y(x) \text{ の変化量)}}$  を調べたい。しかし、実は汎関数に対して  
平均変化率そのものを定義するのは難しい。  
そこで、 $\varepsilon$  の変化量のみを考慮した擬似的な平均変化率

$$\frac{\text{(汎関数 } F \text{ の } v \text{ 方向の変化量)}}{\text{(} \varepsilon \text{ の変化量)}} = \frac{F(y + \varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} = \boxed{\phantom{000}}$$

を使用する。これを「 $v$  方向の平均変化率」と呼ぼう。さらに、  
 $\varepsilon \rightarrow 0$  と極限をとると

$$(\text{ } v \text{ 方向の瞬間変化率}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(y + \varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} = \boxed{\phantom{000}}$$

が得られる。これを用いて、一般の汎関数の微分を定義する。

# 方向微分

## Definition

汎関数  $F$  と関数  $y(x)$ ,  $v(x)$  に対して,

$$F(y)(v) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(y + \varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon}$$

を  $y$  における  $v$  に対する **方向微分** と呼ぶ.

## Example

$F(y) = \int_0^1 y(x)^2 dx$  の方向微分を求める.

$$\begin{aligned} F(y + \varepsilon v) - F(y) &= \int_0^1 \left\{ \boxed{\phantom{y(x)^2 + 2\varepsilon v(x)y(x) + \varepsilon^2 v(x)^2}} \right\}^2 dx - \int_0^1 \left\{ \boxed{\phantom{y(x)^2}} \right\}^2 dx \\ &= \int_0^1 \left\{ y(x)^2 + 2\varepsilon v(x)y(x) + \varepsilon^2 v(x)^2 - y(x)^2 \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ 2\varepsilon v(x)y(x) + \varepsilon^2 v(x)^2 \right\} dx \\ &= 2\varepsilon \int_0^1 v(x)y(x) dx + \varepsilon^2 \int_0^1 v(x)^2 dx \end{aligned}$$

となる. これより「 $v$  方向の平均変化率」を求めると,

$$\frac{F(y + \varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} = \boxed{\phantom{2 \int_0^1 v(x)y(x) dx}} \quad \text{となる.}$$

よって,  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると,  $DF(y)(v) = \boxed{\phantom{2 \int_0^1 v(x)y(x) dx}}$  を得る.

# 方向微分の公式

上記のように定義から直接求める方法もあるが、方向微分には次の便利な公式がある。

## [命題]

汎関数  $F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$  に対して、方向微分は

$$DF(y)(v) = \int_a^b \{f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)\} dx$$

と表せる。ここで、 $f_y$  は第 2 変数,  $f_z$  は第 3 変数に関する偏微分を表す。

ただし、

$$f_y[y(x)] = f_y(x, y(x), y'(x)) \quad f_z[y(x)] = f_z(x, y(x), y'(x)).$$

# 方向微分の例

## Example

- ① 汎関数が  $F(y) = \int_0^1 y(x)^2 dx$  のとき、被積分関数は  $f(x, y, z) = y^2$  となる.  $f_y = 2y$ ,  $f_z = 0$  なので、方向微分は

$$DF(y)(v) = \int_0^1 \boxed{\phantom{2y(x)v(x)}} dx.$$

- ② 汎関数が  $F(y) = \int_0^1 \left\{ y(x) + \frac{1}{2} y'(x)^2 \right\} dx$  のとき、被積分関数は  $f(x, y, z) = y + \frac{1}{2} z^2$  となる.  $f_y = 1$ ,  $f_z = z$  なので、方向微分は

$$\begin{aligned} DF(y)(v) &= \int_0^1 \{ f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x) \} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \boxed{\phantom{v(x) + y(x)v'(x)}} \right\} dx. \end{aligned}$$

## [練習問題]

以下の汎関数の被積分関数  $f(x, y, z)$  を書き, 関数  $y(x)$  における  $v(x)$  に対する方向微分を求めよ.

$$(1) F(y) = \int_0^1 \{2y(x) \sin x + y'(x)^2\} dx$$

$$(2) G(y) = \int_0^1 \left\{ y(x) + \sqrt{1 + y'(x)^2} \right\} dx$$